Министерство образования и науки РФ
ФГБОУ ВО "Государственный академический университет гуманитарных наук"

Факультет: экономики

Магистерская программа: МАСЭП

Кафедра: ____________________________

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

На тему: оценка стоимости реальных опционов

Студент: Измайлов Т.А.

____

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор, Леонидов А.В.

____

Рецензент:
к.ф.- м.н., доцент, Пильник Н.П.

____

Содержание

Введение

Актуальность работы

Оценка стоимости опционов является очень актуальной и находится в числе наиболее сложных задач финансовой математики. Современная практика указывает на то, что достаточно адекватно определить истинную стоимость актива можно лишь при помощи, так называемой теории справедливого ценообразования опционов. Вероятно, в будущем наука сможет предложить более качественные и содержательные модели, однако на сегодняшний день, несмотря на множество недостатков, в качестве основной применяется модель Блэка-Шоулза. Пожалуй, стоит отметить, что опционы являются единственным инструментом, который полноценно отражает истинную структуру рынка, его нелинейность и непредсказуемость. Вообще теория опционов является определенным разделом теории производных инвестиционных инструментов. Хронологически она создавалась как определенный метод снижения инвестиционных рисков, посредством их хеджирования. Однако, существует множество случаев, когда нет никакой возможности снизить риск посредством хеджирования, что оставляет исследователям огромную область для исследования.

Задачи работы

- изложить основные понятия и концепции, которые могут быть полезны при рассмотрении данной проблемы;
- ознакомиться с моделью рассчета стоимости европейских опционов;
- промоделировать случайные поведения цен активов и сравнить полученные результаты с формулой Блэка-Шоулса.

Объектом исследования является рынок ценных бумаг и оперирование с ними. Для этого стало важно ознакомиться с различными классами стохастических процессов, которые могли бы быть полезны для построения моделей и нахождения необходимых показателей (цен, индексов,...) и при реализации расчетов, связанными с рисками, хеджирующими стратегиями, рациональными стоимостями опционов.

Предметом исследования стала формула Блэка-Шоулса расчета стоимости европейского опциона, являющаяся краеугольным камнем современной финансовой математики, поскольку сочетает в себе очень простые и ясные вычисления и в то же время носит довольно противоречивый характер, в силу множества сделанных в ней допущений. Также разобраны возникающие на практике, когда формула Блэка-Шоулса не является применимой.

1 Теория опционов

Одной из более распространенных производных бумаг является опцион, или контракт с опционом. Согласно общепринятой терминологии опцион-колл предоставляет право (но не обязательство) держателю опциона приобрести акции или отказаться от этого. Опцион пут, наоборот, дает покупателю право (но не обязательство) продать акции. По времени исполнения опционы делятся на два основных типа:

- Европейского типа, имеющие фиксированную дату погашения. Срок исполнения продолжается от нескольких минут до нескольких месяцев. Чем больше срок – тем больше риск продавца. Соответственно размер премии тоже будет увеличиваться, так как он всегда эквивалентен размеру угрозы финансовых потерь.

- Американского типа, которые могут быть исполнены в любой момент до даты экспирации.

На практике большинство опционов являются опционами Американского типа, дающие больше свободы покупателю, позволяя выбрать момент исполнения. В случае опционов европейского типа этот момент заранее фиксирован.

Рассмотрим опцион покупателя (опцион-колл) европейского типа со временем исполнения N. Данный опцион характеризуется фиксированной в момент его покупки ценой K, по которой покупатель может приобрести актив, стоимость которого S_N в момент времени N может отличаться от K.

При $S_N > K$ ситуация окажется благоприятной для покупателя, так как по условиям контракта он может купить акции по цене K с последующей немедленной их продажей по рыночной цене S_N. В таком случае получаемый доход от совершения данной операции равен $S_N - K$.

Если же $S_N < K$, право приобретения актива (по цене K) ничего не дает покупателю, так как он может купить акции и по более низкой цене (S_N).

Рассмотрев эти два случая, можно видеть, что в момент времени N

доход покупателя f_N есть

$$f_N = max(S_N - K{,}0)$$

Однако, стоит отметить, что за покупку данного финанового инструмента надо заплатить некоторую премию P_N, и чистый доход покупателя составит

$$max(S_N - K{,}0) - P_N$$

, т.е.

$$(S_N - K) - P_N, S_N > K$$

$$-P_N, S_N \geq K$$

Соотвественно, доход продавца будет равен

$$P_N - (S_N - K), S_N > K$$

$$P_N, S_N \leq K$$

Покупка опциона-колл связана с некой надеждой на изменение стоимости актива в большую сторону. Стоит добавить также, что стоимость опциона P_N зависит не только от N, но и от K.

В основе всех математических моделей по расчёту цены опциона лежит идея эффективного рынка. Предполагается, что «справедливая» премия опциона соответствует его стоимости, при которой ни покупатель опциона, ни его продавец, в среднем не получают прибыли.

2 Формула Блэка-Шоулза

2.1 Необходимые понятия

Для дальнейшей работы понадобится ряд понятий и свойств, связанных со стохастическими процессами.

Вероятностное пространство

Определим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Здесь, как обычно

$\Omega = \{\omega\}$ - пространство исходов, или пространство элементарных событий,

$\mathcal{F} - \sigma$-алгебра подмножеств Ω,

P - вероятностная мера на $(\Omega,\mathcal{F})$.

Дополним вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ потоком (фильтрацией) $F = (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$, состоящим из таких σ-подалгебр $\mathcal{F}_n$, что $\mathcal{F}_m \subseteq \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}$,если $m \leq n$.

События из $\mathcal{F}_n$ будем интерпретировать как "информацию доступную до момента времени n (включительно).

Нормальное распределение

Нормальное распределение или распределение Гаусса - это распределение вероятностей, задаваемых в одномерном случае функцией плотности, которая совпадает с функцией Гаусса:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{(-x-\mu)^2/2\sigma^2},$$

где параметр μ - математическое ожидание, медиана, а также мода распределения, а параметр σ - среднеквадратичное отклонение.

Стандартное нормальное распределение - нормальное распределение, с параметрами $\mu = 0$ и $\sigma = 1$. Его плотность вероятности:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

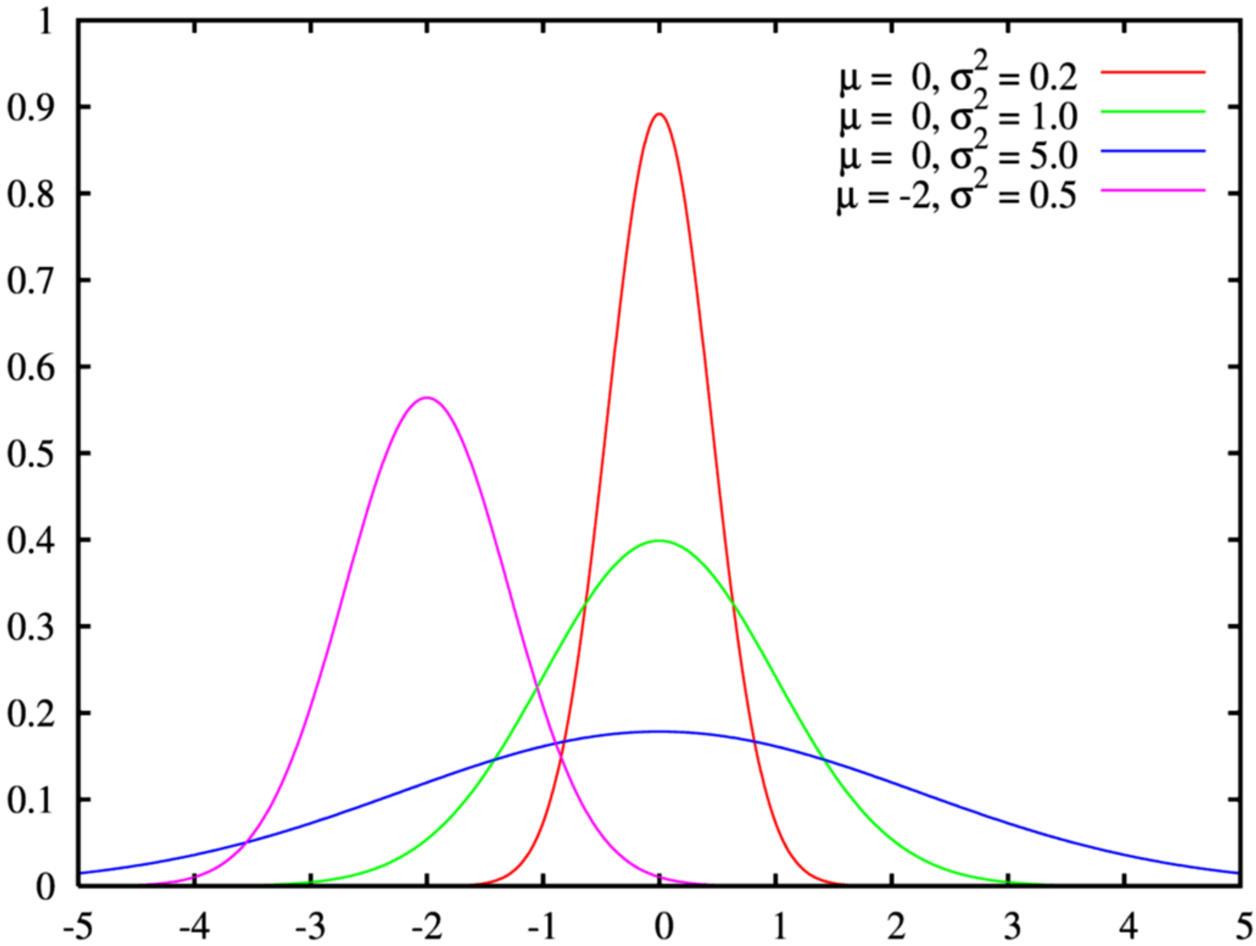

Рис. 1: Плотность вероятности нормального распределения.

Логнормальное распределение

Если случайная величина $\xi \sim N(\mu,\sigma^2)$, тогда $\eta = exp(\xi)$ - неотрицательная случайная величина, имеющая логнормальное распределение. Распределение случайной величины η задается плотностью вероятности, имеющей вид

$$f_\eta(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2}} exp(-(\ln x - \mu)^2/2\sigma^2),$$

где $x > 0, \sigma > 0, \mu \in \mathbb{R}$. Тогда говорят, что η имеет логнормальное распределение с параметрами μ и σ или $\eta \sim LogN(\mu,\sigma^2)$.

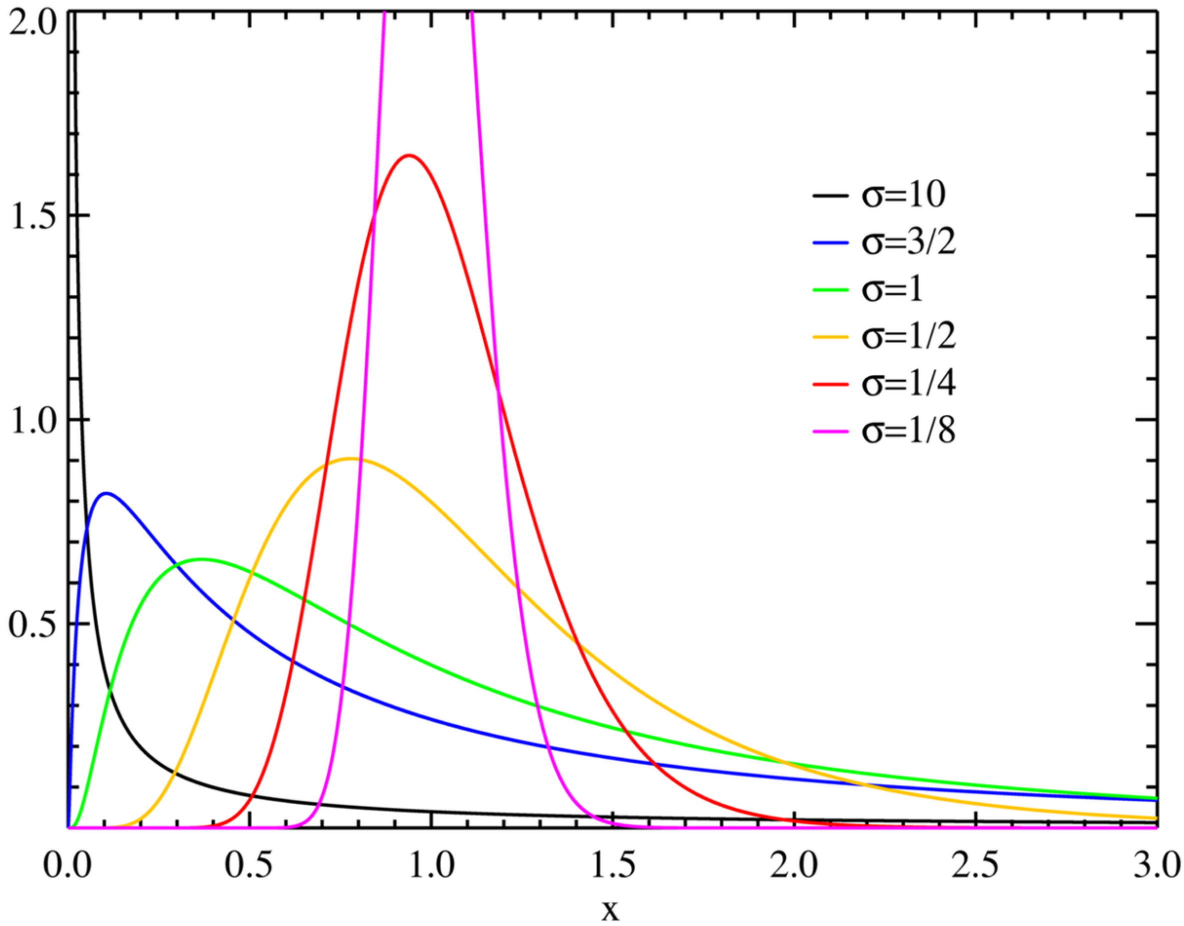

Рис. 2: Плотность вероятности.

Замечание:
Если $\xi \sim LogN(\mu,\sigma^2)$, то $\eta = \ln \xi \sim N(\mu,\sigma^2)$.
И наоборот, если $\eta \sim N(\mu,\sigma^2)$, то $\xi = exp(Y) \sim LogN(\mu,\sigma^2)$

Стандартное броуновское движение

Стандартное одномерное броуновское движение это непрерывный стохастический процесс $z = \{z_t\}$, определенный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, такой что

- Значение в начальный момент времени $z_{t_0} = 0$ почти всюду;
- $z_{t_{i+1}} - z_{t_i} \sim N(0,t_{i+1} - t_i)$. Приращение $z_{t_{i+1}} - z_{t_i}$ имеет нормальное распредение с математическим ожиданием, равным нулю, и дисперсией равной $t_{i+1} - t_i; \forall i = 0,...,n-1$;

- Для любых промежутков времени $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$ приращения $z_{t_1} - z_{t_0}, z_{t_2} - z_{t_1}, ..., z_{t_{n-1}} - z_{t_n}$ независимы $\forall i = 0,...,n-1$.

Стандартное броуновское движение характеризуется следующими особенностями:

- Это процесс с непрерывным временем.
- Это мартингал - такой случайный процесс, что наилучшим предсказанием поведения процесса в будущем является его настоящее состояние. Формально $E[z_{t+h}|\mathcal{F}] = z_t$, для всех $h > 0$.
- Это марковский процесс, такой что $E[z_{t+h}|\mathcal{F}] = E[z_{t+h}|z_t]$
- Величина дисперсии за время h есть $Var(z_{t+h} - z_t)^2 = h$.

Арифметическое броуновское движение

Арифметическое броуновское движение $\tilde{x} = \{\tilde{x}_t\}_{t\geq 0}$, или сокращенно $\tilde{x}_t$, можно определить с помощью стандартного броуновского движения, описанного выше. Его характеризует ненулевое начальное значение и ожидаемое значение тренда. Формально это процесс:

$$\tilde{x}_t = x_0 + \alpha t + \sigma z_t \tag{1}$$

где z_t - стандартное броуновское движение. Параметр α называется параметром дрифта, показывающего рост ожидаемого тренда процесса, параметр σ его волатильность или стандартное отклонение. Арифметическое броуновское движение - непрерывный марковский процесс со значением в начальный момент времени x_0, такой что случайная величина $\tilde{x}$ для всех значений времени $t(> 0)$ нормально распределена $\tilde{x}_t \sim N(x_0 + \alpha t, \sigma^2 t)$.

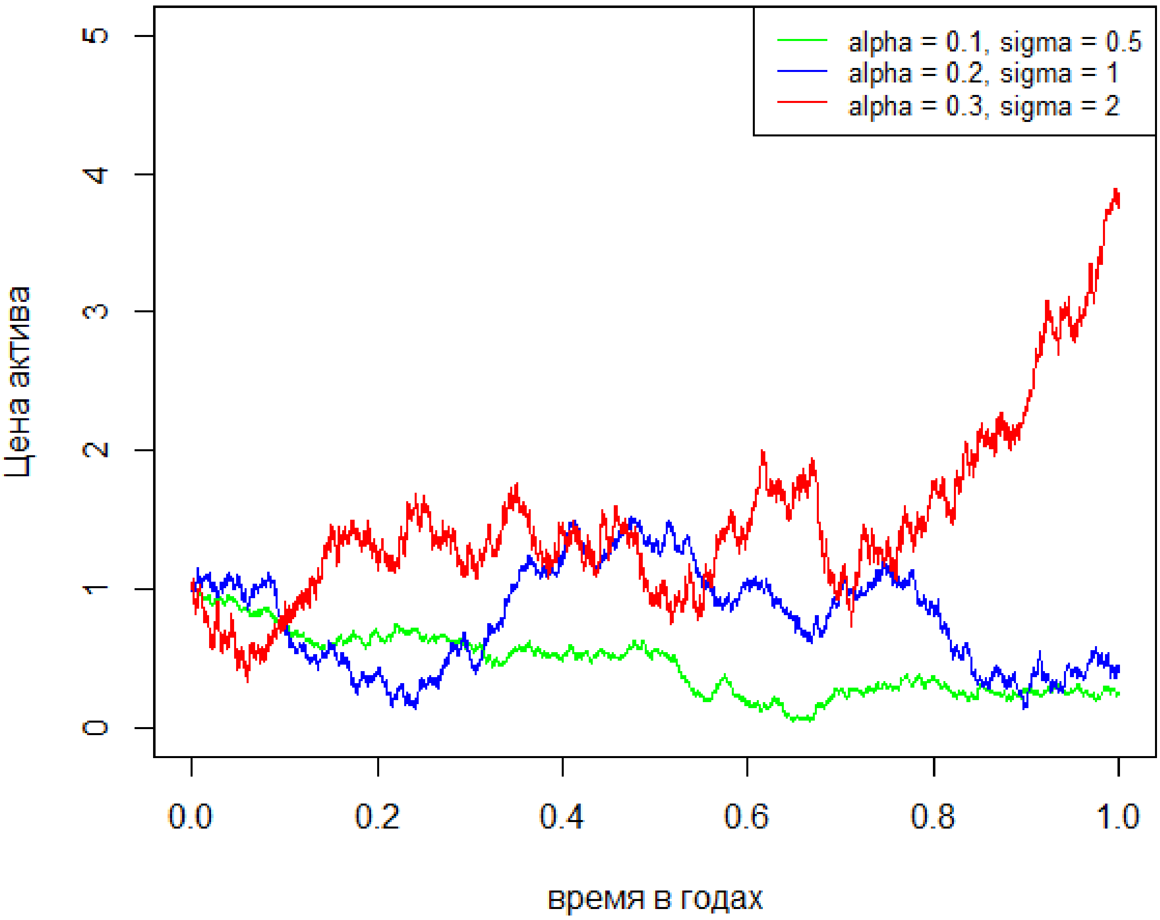

Рис. 3: **Траектории арифметического броуновского движения**.

Арифметическое броуновское движение можно представлять себе как аккумуляцию независимых, стационарных и нормально распределенных приращений $d\tilde{x}$ в течение множества непересекающихся малых интервалов времени длины dt, с приращениями, имеющими математическое ожидание αdt и дисперсию $\sigma^2 dt$. Данное представление арифметического броуновского движения позволяет записать его в виде стохастического дифференциального уравнения

$$d\tilde{x}_t = \alpha dt + \sigma dz_t. \tag{2}$$

Множество экономических величин разумно описывать их тенденцией к росту (дрифтом) и волатильностью. На длинном промежутке времени тенденция процесса к росту становится доминирующем фактором (так как $\sqrt{t}$ становится ничтожно малым по сравнению с t), в то время как в коротком промежутке времени им является волатильность (t становится незначительным по сравнению с $\sqrt{t}$).

Для финансовых активов можно в целом объяснять их поведение на длинном промежутке времени с помощью параметра дрифта, однако в краткосрочной перспективе они могут сильно флуктуировать из-за различных факторов или волатильности рынка.

Пример1. Вероятность удачного исполнения опциона

Пусть цена акцию S_t изменяется согласно уравнению (2). Европейский опцион-колл может быть исполнен во время T по цене I. Какая вероятность благоприятного исполнения опциона в момент времени T? Обозначим эту вероятность как $\theta_t \equiv P_t[S_t \geq I]$. Из уравнения (1) и определения стандартного броуновского движения получаем

$$\theta_t = P_t[S_t + \alpha\tau + \sigma\sqrt{\tau}\varepsilon \geq I]$$

где $\tau \equiv T - t$ и ε - случайная величина, имеющая стандартное нормальное распределение. Откуда получаем

$$\theta_t = P_t[\varepsilon \geq -d_1], d_1 = \frac{S_t - I + \alpha\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

Исходя из симметричности стандартного нормального распределения $N(\cdot)$ (в нуле), получаем

$$\theta_t = P[\xi \geq -d_1] = P_t[\xi \leq d_1] = N(d_1)$$

Промоделировав поведение цены S_t согласно уравнению (2) можно легко вычислить $N(d_1)$.

Однако, моделирование цен согласно арифметическому броуновскому движению довольно опрометчивый шаг. Как было неоднократно замечено, этот процесс имеет ряд существенных недостатков. В данной модели цены финансовых активов могут принимать отрицательные значения (что в действительности позволило бы инвесторам приобрести акции и получить выгоду), что не отражает реального их поведения. С точки зрения исследования поведения "стохастической составляющей" целесообразнее использовать не сами величины $\tilde{x} = (\tilde{x})_n$, а величины $h_n = ln(\tilde{x}_n/\tilde{x}_{n-1})$, которые можно интерпретировать как "отдачу" или "логарифмическую прибыль" ведущих себя более "однородно" в отличие от $\tilde{x} = (\tilde{x})_n$.

Геометрическое броуновское движение

Геометрическое броуновское движение - случайный процесс с непрерывным временем, являющийся экпонециальной формой броуновского движения. Широко используется для моделирования изменений цен на активы во времени, так как может принимать только положительные значения, что является хорошей аппрорсимацией поведения цен, который, однако не учитывает редкие события (выбросы). Формально экспонециальная форма броуновского движения

$$\tilde{X}_t = f(\tilde{x}_t) = exp(\beta\tilde{x}_t) = e^{\beta\tilde{x}_t} \tag{3}$$

где $\tilde{x}_t$ - арифметическое броуновское движение, $\tilde{x}_t \sim N(x_0+\alpha t, \sigma^2 t)$. Значение в начальный момент времени $X_0 = e^{\beta x_0}$. Нетрудно видеть связь экспонециальной записи броуновского движения с обычной. Логарифмируя (3), получаем

$$\tilde{x}_t = \frac{1}{\beta} ln(\tilde{X}_t) \tag{4}$$

Данный процесс также можно переписать в виде стохастического дифференциального уравнения

$$d\tilde{X}_t = g\tilde{X}_t dt + \sigma\beta\tilde{X}_t dz_t \tag{5}$$

где $g \equiv g(\beta) = \alpha\beta + \frac{1}{2}\beta^2\sigma^2$ - "параметр сноса" σ^2 - его дисперсия, z_t - стандартное броуновское движение, β - параметр, определяющий вид функции плотности логнормального распределения. Особый случай экспонециальной формы записи броуновского движения - геометрическое броуновское движение при $\beta = 1$. В этом случае уравнение (4) принимает вид

$$\tilde{x}_t = ln(\tilde{X}_t) \tag{6}$$

В этом случае $g = g(1) = \alpha + \frac{1}{2}\sigma^2$. Стохастическое дифференциальное уравнение можно переписать как

$$d\tilde{X}_t = g\tilde{X}_t dt + \sigma \tilde{X}_t dz_t \tag{7}$$

Решением которого согласно лемме Ито будет

$$\tilde{X} = X_0 exp(\alpha t + \sigma z_t) \tag{8}$$

где z_t - стандартное броуновское движение.

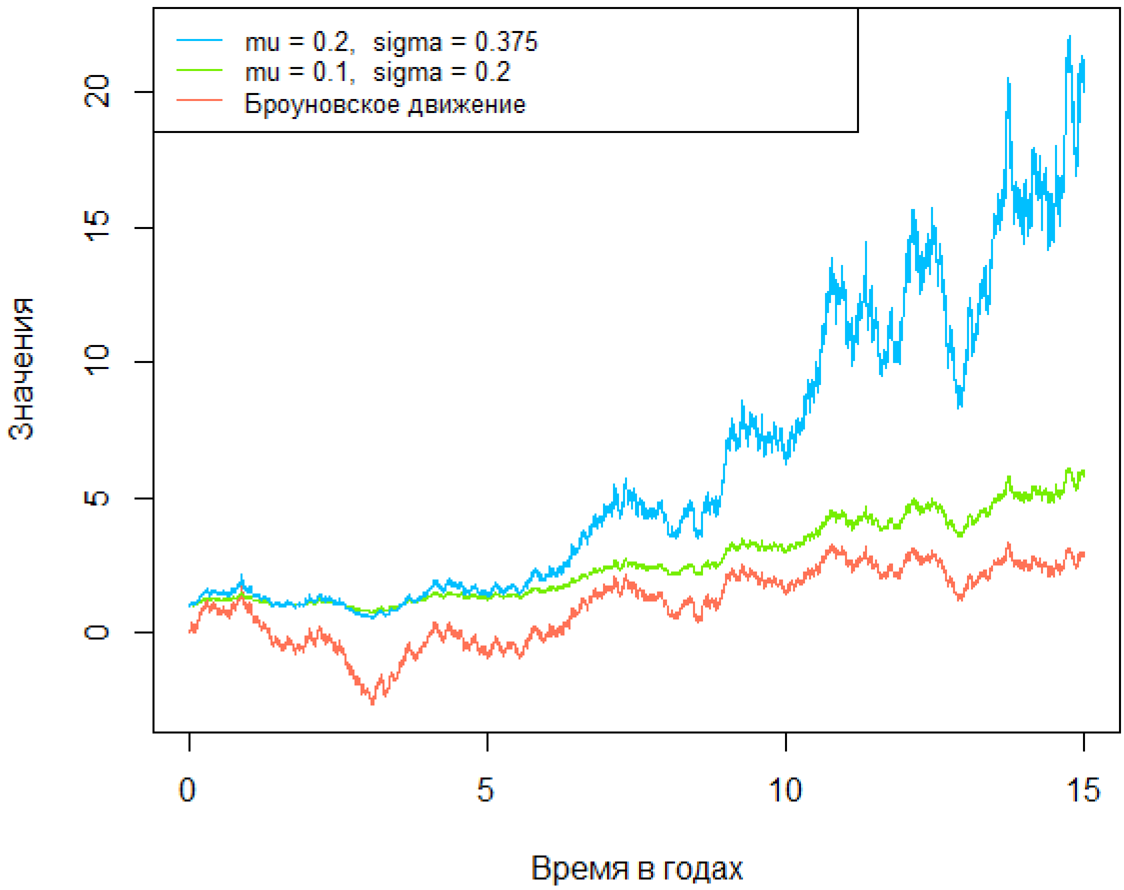

Рис. 4: Траектории геометрического броуновского движения.

Ожидаемое значение величины $\tilde{X}_t$ и дисперсия определяются как

$$E[\tilde{X}_t] = X_0 exp(g) = X_0 exp(\alpha + \frac{1}{2}\sigma^2)$$

$$Var[\tilde{X}_t] = X_0^2 e^{2gt} exp(e^{\sigma^2 t} - 1)$$

Однако для распределений с "тяжелыми хвостами" параметр β может быть больше или меньше единицы в зависимости от значений третьего (m_3) и четвертого (m_4) центральных моментов, называемых ассиметрией и куртозисом соответсвенно. Согласно определению

$$m_3 = \frac{\mu_3}{\sigma_3} = E\left[\left(\frac{\xi - \mu}{\sigma}\right)^3\right] = \frac{E[(\xi - \mu)^3]}{E[(\xi - \mu)^2]^{3/2}}$$

$$m_4 = E\left[\left(\frac{\xi - \mu}{\sigma}\right)^4\right] = \frac{\mu_4}{\sigma_4} = \frac{E[(\xi - \mu)^4]}{E[(\xi - \mu)^2]^{4/2}}$$

Для нормально распределенных случайных величин $m_3 = 0$ и $m_4 = 3$

Для множества финансовых активов (индексов фондового рынка, валютных курсов, цен на драгоценные металлы) логарифм изменения цен демонстрирует существенные значения ассиметрии и куртозиса. Это является подтверждением того, что логарифмы цен финансовых активов подчиняются более общему распределению, а не просто нормальному.

2.2 Формула Блэка-Шоулса

Первая попытка математического описания стоимостей $S = (S_t)_{t \geq 0}$ акций, опирающегося на концепции теории вероятностей, была предпринята Л.Башелье в его диссертации "Théorie de la spéculation опубликованной в 1900г. в Annales scientifiques de l'École Normale Supépieure, где он предложил рассматривать $S = (S_t)_{t \geq 0}$ как случайный процесс.

После анализа экспериментальных данных поведения цен $S_t^{(\Delta)}, t = 0, \Delta, 2\Delta, \ldots,$ (с интервалом времени, равным Δ), он заметил, что $S_t^{(\Delta)} - S_{t-\Delta}^{(\Delta)}$ имеют (в статистическом смысле) нулевое среднее и отклонение $|S_t^{(\Delta)} - S_{t-\Delta}^{(\Delta)}|$ порядка $\sqrt{\Delta}$. Таким свойством обладает, например, случайное блуждание $S_t^{(\Delta)}, t = 0,\Delta,2\Delta,\ldots,$ с

$$S_t^{(\Delta)} = S_0 + \sum_{k \le \lfloor \frac{t}{\Delta} \rfloor} \xi_k^{(\Delta)}$$

где независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_k^{(\Delta)}$ принимают два значения, $\pm\sigma\sqrt{\Delta}$, с вероятностями $\frac{1}{2}$.

Предельный переход по $\Delta \to 0$ приводит к случайному процессу

$$S_t = S_0 + \sigma W_t, t \ge 0,$$

где $W = (W_t)_{t\ge 0}$ есть не что иное, как рассмотренное Л.Башелье броуновское движение(или винеровский процесс).

Исходя из этого Л.Башелье дал формулу для математического ожидания $C_T = Ef_t$ с $f_T = max(S_T - K,0)$, что с современной точки зрения есть (в предположении, что процентная ставка банковского счета $r = 0$) значение премии, которую покупатель опциона-колл должен заплатить его продавцу, который обязан по контракту опциона продать покупателю актив в момент времени исполнения T по цене K. (Если $S_T > K$, то покупатель опциона имеет прибыль равную $S_T - K = C_T$, поскольку он может купить акции по цене K и тут же продать их по более высокой цене S_T; если же $S_T < K$,то покупатель просто не предъявляет опцион к исполнению, и его потери равны выплаченной им премии C_T).

Формула, найденная Л.Башелье

$$C_t = (S_0 - K)\Phi\left(\frac{S_0 - K}{\sigma\sqrt{T}}\right) + \sigma\sqrt{T}\varphi\left(\frac{S_0 - K}{\sigma\sqrt{T}}\right),$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}, \qquad \Phi(x) = \int_{\infty}^{x} \varphi(y)dy,$$

стала предвестником знаменитой формулы Блэка и Шоулса, для рациональной стоимости опциона-колл в случае, когда $S = (S_t)$ описывается геометрическим броуновским движением.

Гипотеза случайного блуждания для описания эволюции цен была далеко не сразу принята экономистами, однако, именно она и привела к привычной концепции эффективного рынка. "Эффективность" рынка подразумевает, что рынок рационально реагирует на обновление "информации" – под этим подразумевается, что на рынке

1. мгновенно производится коррекция цен, которые устанавливаются так, что оказываются в состоянии «равновесия», становятся «справедливыми», не оставляя места участникам рынка для арбитражных возможностей – получения прибыли за счет разницы в ценах;

2. все участники рынка (трейдеры, инвесторы и т.д.) одинаково интерпретируют поступающую информацию, мгновенно корректируя свои решения при обновлении этой информации;

3. участники рынка в своих целевых установках, их действия носят «коллективно-рациональный» характер. С формальной же точки зрения понятие эффективности должно рассматриваться в зависимости от характера информации, получаемой рынком и его участниками.

Принято различать следующие три вида доступной информации:

- информация, которая содержится в значениях цен в предыдущие моменты времени;

- информация, которая содержится не только в прошлых значениях цен, но и в публично доступных источниках.

Для объяснения понятия «информация» следует исходить из того, что «неопределенность», возникающая на рынке, может быть описана как «случайность» в рамках некоторого вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Модель ценообразования опционов Блэка — Шоулза - это модель, определяющая теоретическую цену на европейские опционы, подразумевающая, что если базовый актив торгуется на рынке, то цена опциона на него неявным образом уже устанавливается самим рынком. Данная модель получила широкое распространение на практике и, помимо всего прочего, может также использоваться для оценки всех производных бумаг. Чтобы рассчитать теоретическую стоимость опциона с помощью формулы Блэка-Шоулса нужно знать по меньшей мере пять характеристик опциона и его базового контракта:

- цену исполнения;
- время, оставшееся до экспирации;
- текущую цену базового контракта;
- безрисковую процентную ставку в течение действия срока действия опциона;
- волатильность базового контракта.

Согласно модели Блэка — Шоулза ключевым элементом определения стоимости опциона является ожидаемая волатильность базового актива. В зависимости от колебания актива цена на него возрастает или понижается, что прямо пропорционально влияет на стоимость опциона. Таким образом, если известна стоимость опциона, можно определить уровень ожидаемой рынком волатильности. Вывод модели Блэка-Шоулса основывается на концепции безрискового хеджирования. Покупая акции и одновременно продавая опционы-call на эти акции, инвестор может конструировать безрисковую позицию, где прибыли по акциям будут точно компенсировать убытки по опционам, и наоборот. Безрисковая хеджированная позиция должна приносить доход по ставке, равной безрисковой процентной ставке, в противном случае существовала бы возможность извлечения арбитражной прибыли и инвесторы, пытаясь получить преимущества от этой возможности, приводили бы цену опциона к равновесному уровню.

Чтобы вывести свою модель ценообразования опционов, Блэк и Шоулз сделали следующие предположения:

1. Изменение цены базового актива носит случайный характер, и на него невозможно воздействовать, ровно как невозможно заранее предсказать направление этого изменения.

2. Процентные или относительные изменения цены базового инструмента имеют нормальное распределение.

3. Принимая то, что изменение цены базового контракта накапливаются непрерывно, цены базового контракта при экспирации распределяются логнормально.

4. Математическое ожидание данного логнормального распеделения - цена базового контракта.

Предположение гауссовости распределений величин является наиболее привлекательным и с точки зрения теоретического анализа, и с точки зрения хорошо развитой “статистики нормального распределения”, однако, приходится считаться с тем, что статистическая обработка данных многих финансовых рядов показывает, что предположение гауссовости далеко не всегда корректно отражает истинную картину поведения цен. Для нормально распределенных случайных величин существует правило "трех сигм" состоящее в том, что с вероятностью 0,9973 значение нормально распределённой случайной величины лежат в интервале $(x - 3\sigma; x + 3\sigma)$, где σ - стандартное отклонение .

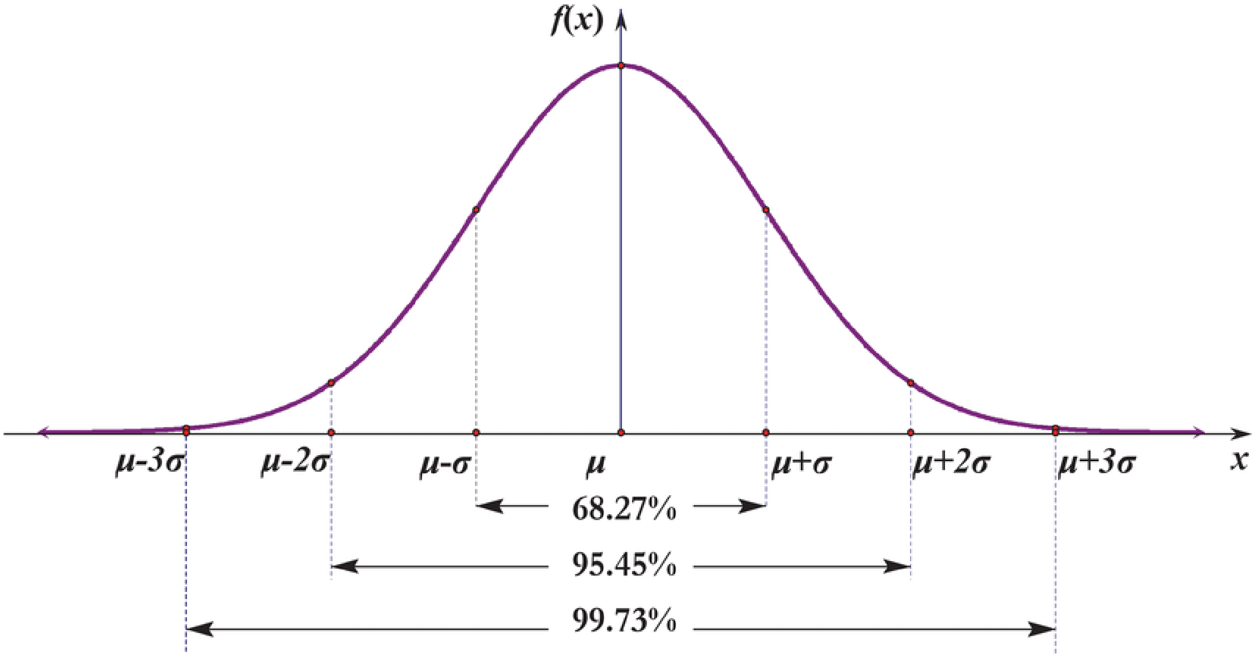

Рис. 5: Правило "трех сигма"

В реальности же гораздо больше значений величин не попадает в указанный интервал, что свойственно, например, распределениям с "тяжелыми хвостами"

Цена опциона-колл:

- C_0 - рыночная цена опциона-колл;
- S - цена акции в настоящий момент времени;
- I - цена исполнения опциона;
- r - безрисковая процентная ставка;
- T - время до экспирации опциона;
- σ - волатильность (стандартное отклонение) доходности базового актива.

Цена акции $S = (S)_t$ изменяется согласно уравнению

$$dS_t = gS_t dt + \sigma S_t dz_t$$

где g - параметр дрифта, σ - параметр волатильности, z_t - стандартное броуновское движение.

Блэк и Шоулс использовали этот проценсс для определения формулы стоимости европейского опциона-колл. В момент времени T европейский опцион-колл приносит его обладателю большее из значений $S_t - I$ и нуля, то есть $C_T = max\{S_I - I{,}0\}$. Формула для вычисления опциона

$$C_0 = SN(d_1) - Ie^{-rT}N(d_2) \tag{9}$$

где $N(\cdot)$ - кумулятивная функция распределения стандартного нормального распределения. Параметры d_1 и d_2 вычисляются следующим образом

$$\begin{gathered} d_1 = \frac{ln(S/I) + [r + (\sigma^2/2)]T}{\sigma T}, \\ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}. \end{gathered} \tag{10}$$

Однако, на практике не все предположения, сделанные в формуле Блэка-Шоулса эмпирически обоснованны. Эта модель широко используется как аппроксимация реальности, однако слепо ее использовать - подвергать себя непредвиденному риску, оценки которого не умещаются в колоколообразные кривые. Все формулы, полученные в формуле Блэка-Шоулса в дискретном и непрерывном вариантах, выведены в предположении того, как именно через стандартный винеровский процесс (броуновское движение) можно представить эволюцию цен. Но ведь есть и реальные биржевые данные и теоретическое описание цен допускает статистическую проверку, которая, как и любая статистика, имеет некоторую неоднозначность. Так вот, уже в рамках этой неоднозначности понятно, что заложенные в вывод формулы Блэка-Шоулса постоянные параметры сноса и волатильности являются идеализацией (грубо говоря, смысл термина "волатильность цены"гораздо шире, причем на любом масштабе времени).

Во множестве источников, связанных с этой проблематикой, говорится о том, что множество практических финансовых данных демонстрируют значительное значение куртозиса (для нормального распределения он равен трем), что указывает на большие колебания, которые не описываются гауссовскими моделями. Потребность в моделях, которые могут описать подобные флуктуации никогда не была столь высока, учитывая непрерывный рост в индустрии производных инструментов.

Множество авторов (Bouchaud,2003) считают распределение Леви альтернативой гауссовскому распределению, которое часто используется в моделях статистической физики и полезно для описания масштабных явлений (доход индивида, амплитуда землетрясений и другие природные катастрофы). Основным и самым важным свойством является степенное поведение при больших аргументах.

$$L_\mu(x) \sim \frac{\mu A_\pm^\mu}{x^{1+\mu}}, x \to \pm\infty \tag{11}$$

где $0 < \mu < 2$ и $A_\pm^\mu$ - константы, объясняющие поведение хвостов распределения для положительных или отрицательных флуктуаций переменной x. В общем случае распределение Леви характеризуется параметром ассиметрии, который определяется как

$$\beta \equiv (A_+^\mu - A_-^\mu)/(A_+^\mu + A_-^\mu)$$

измеряющим вес положительных или отрицательных хвостов. Мы остановимся на симметричном случае, когда $\beta \equiv 0$. Полностью ассиметричный случай ($\beta \equiv 1$) полезен для работы со строго положительными случайными величинами, например, с ценами на актив, не превышающими определенного значения. Для $\mu = 1$ имеем рапределение Коши:

$$L_1(x) = \frac{A}{x^2 + \pi^2 A^2}.$$

А $\mu = 2$ - рапределение Гаусса. Характеристическая функция симметричного распределения Леви (см. БУШО) дается выражением

$$\varphi_\mu(z) = exp(-a_\mu |z|^\mu), \tag{12}$$

где a_μ - константа, пропорциональная параметру A^μ:

$$A^\mu = \mu \Gamma(\mu - 1) \frac{sin(\pi\mu/2)}{\pi} a_\mu \quad 1 < \mu < 2,$$

и

$$A^\mu = (1 - \mu)\Gamma(\mu) \frac{sin(\pi\mu/2)}{\pi\mu} a_\mu \quad \mu < 1.$$

Если $\mu \leq 2$ распределение имеет "тяжелые"хвосты и его пик становится все более острым (рис 6). Такие распределения описывают скачкообразные явления, характеризующиеся частыми малыми значениями и редкими большими.

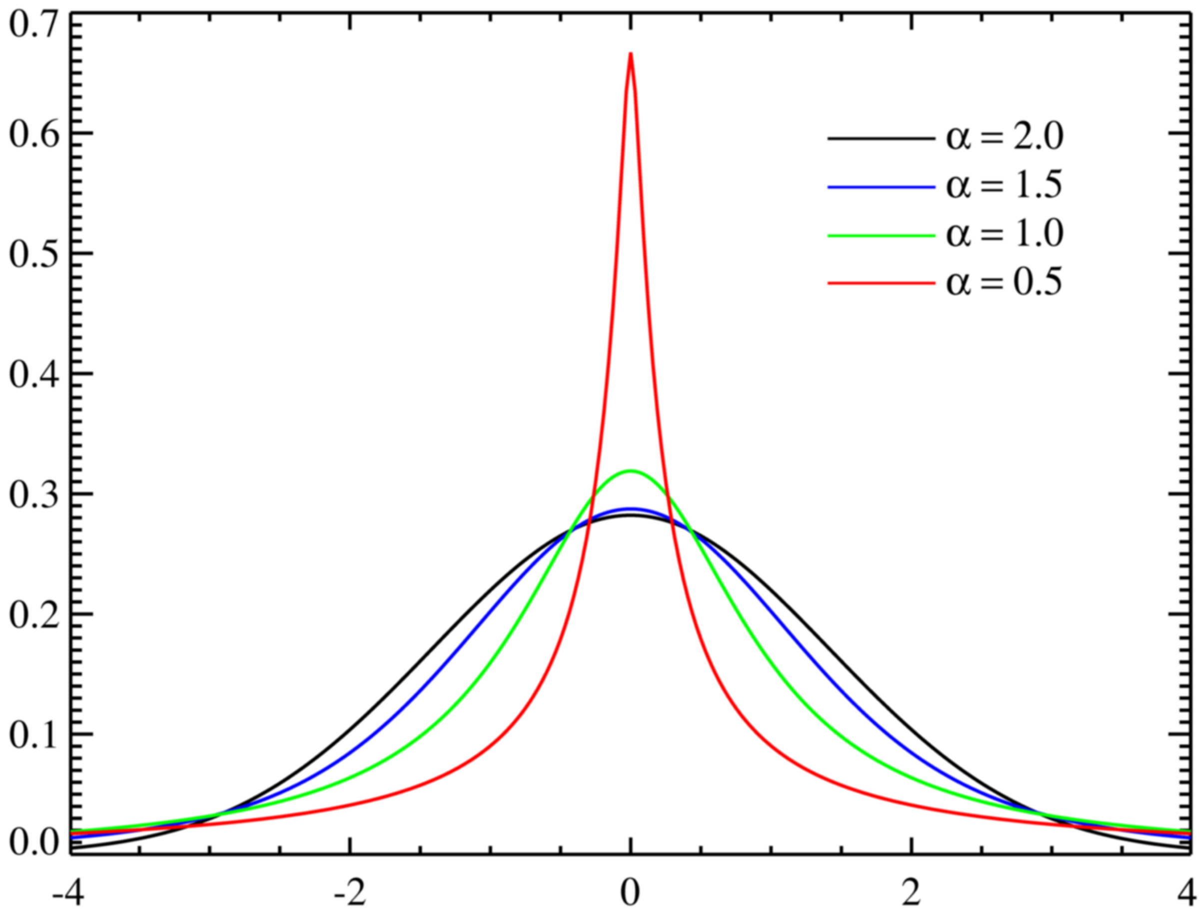

Рис. 6: Распределение Леви с параметром α

.

Стоит отметить, распределение Леви имеет ряд недостатков, например, бесконечную дисперсию. Более важным замечанием является тот факт, что финансовые данные имеют свойство быть похожими на гауссиану на больших промежутках времени. Распределение Леви не объясняет не объясняет этого (не применима центральная предельная теорема из-за бесконечной дисперсии). Но рост эмпирических данных о финансовых рядах, полученных за последнее время и демонстрирующих степенную зависимость вызвал новый интерес к данному распределению. Ряд его вышеперечисленных недостатков можно легко устранить, незначительно изменив характеристическую функцию следующим образом (Bouchaud,2003).

$$\tilde{L}(z) = exp\Big[- a_\mu \frac{(\alpha^2 + z^2)^{\mu/2} cos(\mu arctg(|z|/\alpha)) - \alpha^\mu}{cos(\pi\mu/2)} \Big]$$

для $1 \leq \mu \leq 2$. При $\alpha = 0$ получаем уравнение (11). Используя (12) легко получить моменты распределения для $1 < \mu < 2$:

$$m_2 = \mu(\mu - 1)\frac{a_\mu}{|cos\pi\mu/2|\alpha^{\mu-2}}$$

$$m_3 = 0$$

$$m_4 = \frac{(3-\mu)(2-\mu)|cos\pi\mu/2|}{\mu(\mu-1)a_\mu\alpha^\mu}.$$

Отметим, что при $\alpha = 2$ получаем гауссовское распределение для которого $m_4 = 0$.

Полученное в результате распределение называется "усеченным" распределением Леви, которое похоже на стандартное, но имеет менее "тяжелые хвосты что обеспечивает конечную дисперсию. Цена на актив может быть описана процессом Леви, в основе которого лежит полученное "усеченное" распределение Леви. Данный процесс может быть получен как сумма независимых и одинаково распределенных случайных величин, имеющих распределение Леви. Так как теперь дисперсия распределения конечна и центральная придельная теорема применима, то процесс сходится к гауссовскому.

Точное моделирование финансовых рядов является очень важным элементом в теории опционов. Для моделей, не являющихся гауссовыми, слабо изучен вопрос связанный с хеджированием. Стандартным подходом к оценке является, как уже было отмечено, модель Блэка-Шоулса, где нормальность (или логнормальность) изменения цены позволяет получить стратегию хеджирования, позволяющую полностью устранить риск для продавца опциона. Однако, для более общих моделей ценообразования получить безрисковый хэдж не удается по той простой причине, что его просто нет. В этом случае модель Блэка-Шоулса не дает ответ на вопрос, как действовать.

Недостатки модели позволили (J.P.Bouchaud,D.Sornette,1996) развить простой и более общий подход к теории опционов. Пусть в общем случае безрисковый хэдж и не существует, возможно найти такую оптимальную стратегию хэджирования, способную минимизировать меру риска. Очевидным способом измерить меру риска является дисперсия распределения благосостояния продавца. Бушо и Сорнетт получили выражение для оптимальной стратегии, которая обоснованна и для любых негауссовых моделей.

3 Моделирование случайных процессов и сравнение с моделью Блэка-Шоулса

Пример2.

Пусть нет безрисковой ставки r и цена P на актив изменяется согласно модели геометрического броуновского движения

$$d\tilde{P}_t = (g\tilde{P}_t)dt + (\sigma\tilde{P}_t)dz_t$$

где g - параметр дрифта, σ^2 - его дисперсия и z_t - стандартное броуновское движение.

Для того, чтобы понять, пользоваться ли возможностью покупки актива, нужно

- построить возможные траектории процесса изменения цены актива во времени;
- построить плотность распределения выплат $max(P_T - I{,}0)$;
- найти $E[max(P_T - I{,}0)]$

Параметры для моделирования:

- начальное значение цены актива $P_0 = 50$
- время экспирации $T = 5$ годам;
- параметр дрифта $g = 0.1$;
- параметр волатильности $\sigma = 0.5$;

- количество точек на интервале $[0,T]$ равно 2^{15};
- количество траекторий цены P_t равно 100.

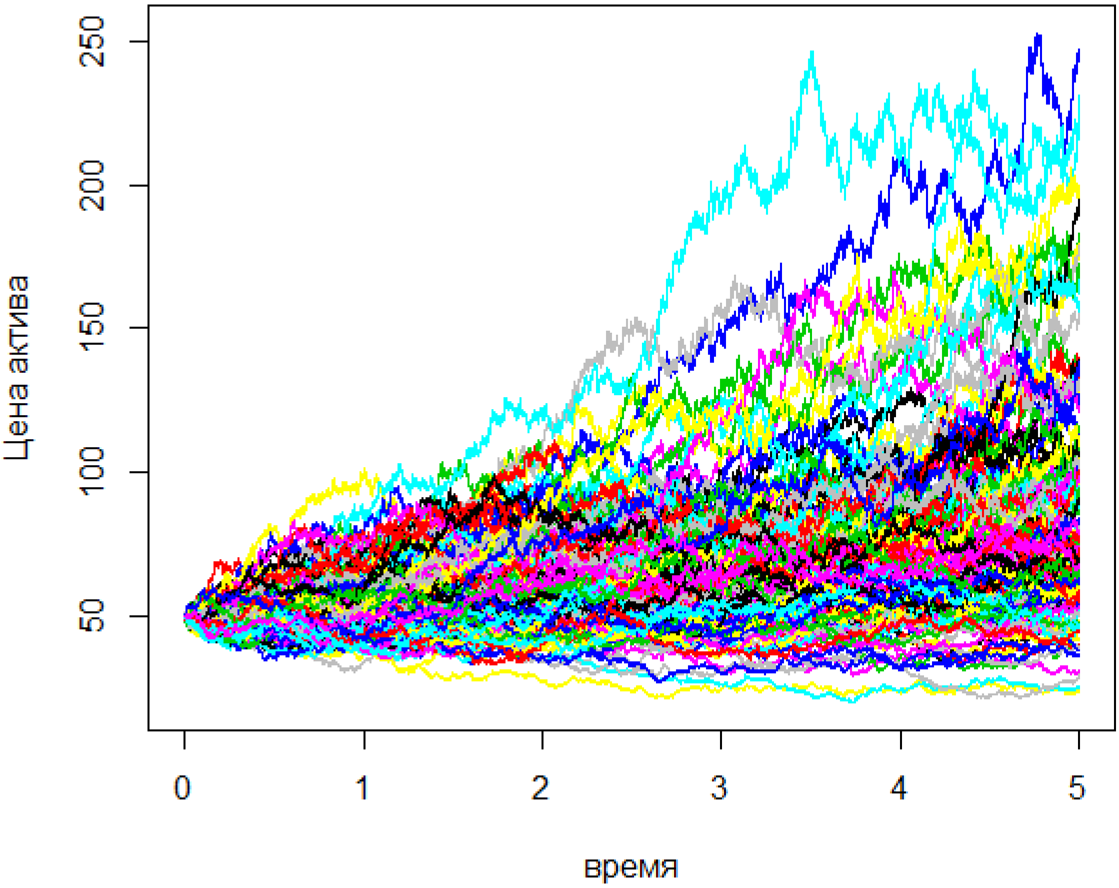

Рис. 7: Моделирование траекторий изменения цены согласно модели геометрического броуновского движения.

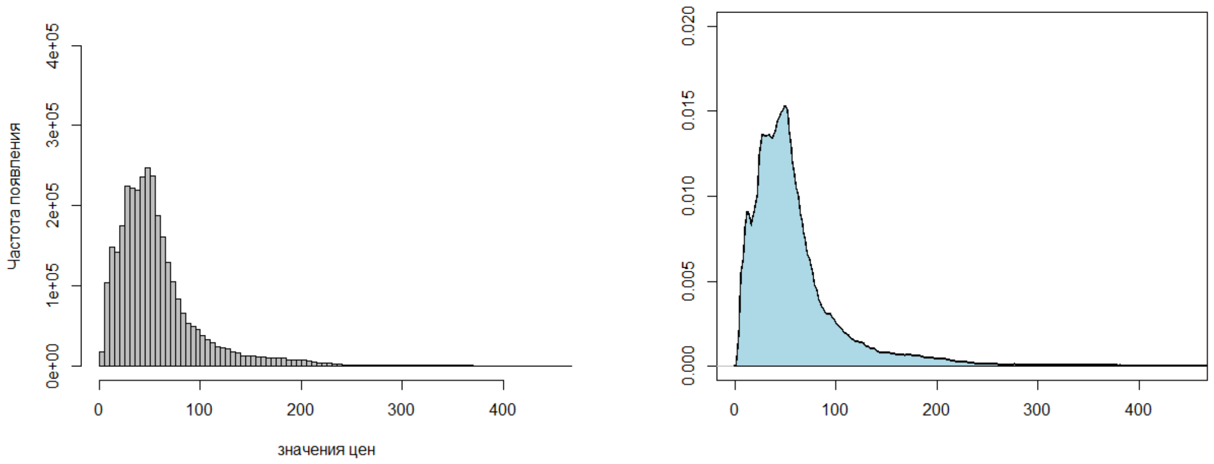

Рис. 8: Распределение полученных траекторий цен и плотность полученного распределения. $m_1 = 60.23861, m_2 = 53.13029$

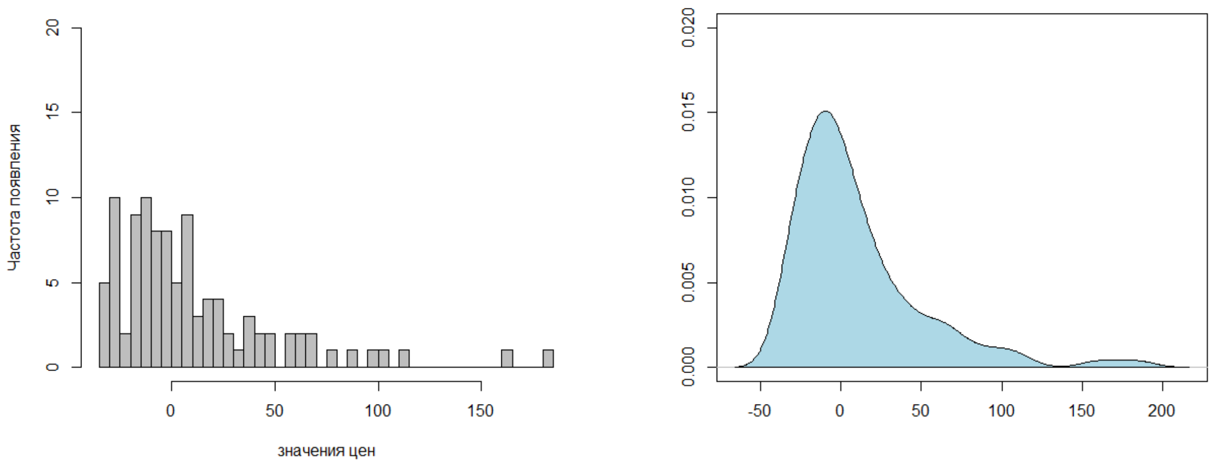

Рис. 9: Распределение выплат и его плотность.
$m_1 = 10.23861, m_2 = 39.93373$

Остается найти $C = E[max(P_T - I{,}0)] = 10.23861$. Выплата по опциону-колл составила 10.23861 при начальных инвестициях в 50. Теперь сравним полученное значение со значением, которое может быть получено при использовании формулы Блэка-Шоулса согласно уравнениям (9) и (10) со следующими параметрами

- начальное значение цены актива $P_0 = 50$
- текущее значение цены актива $P_t = 60.23861$
- время экспирации $T = 5$ годам;
- параметр дрифта $g = 0.1$;
- параметр волатильности $\sigma = 0.5$
- безрисковая процентная ставка равна 10%

$$d_1 = \frac{ln(P_T/I) + [r + (\sigma^2/2)]T}{\sigma T} = 0.816$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} = -0.302951.$$

$$C_0 = P_T N(d_1) - Ie^{-rT} N(d_2) = 36.18505$$

Таким образом выплата по опциону составила 36.18505, что существенно выше ($36.18505 > 10.23861$), чем в построенном примере. Проделаем то же самое для другого количества траекторий и других параметров геометрического броуновского движения при моделировании изменения цены процесса. Результаты моделирования приведены в таблицах.

Таблица 1 — Время экспирации - 5 лет, цена базового актива - 50

Количество итераций	μ_1	σ_1	C	C_0
100	0.1	0.5	13.8847	39.4028
500	0.1	0.5	15.99687	41.28452
1000	0.1	0.5	13.50262	39.06375

Таблица 2 — Время экспирации - 5 лет, цена базового актива - 50

Количество итераций	μ_2	σ_2	C	C_0
100	0.5	0.7	148.3479	168.8286
500	0.5	0.7	157.9438	178.3352
1000	0.5	0.7	189.1772	209.3451

Как видим, цена опциона посчитанная по формуле Блэка-Шоулса каждый раз выше, чем в построенной модели. Это может быть связано с большим количеством траекторий и усреднением полученного распределения, которое "чувствительнее" к изменениям цены актива.

Заключение

Традиционным подходом для оценки цен контрактов с производными инструментами является нахождение совершенной хеджирующей стратегии, которая идеально копирует исходный контракт. Полученная в результате использования этой стратегии цена не предполагает наличие какого-либо риска. Однако, этот случай возможен лишь при выполнении определенных условий, описанных в модели Блэка-Шоулса. В реальности же существует великое множество ситуаций, не могущих быть описанными очень специфичными гауссовскими моделями, когда найти оптимальную стратегию не представляется возможным. Риск - самое важное понятие, возникающее при исследовании рынка финансовых инструментов. Во множестве документов трейдинговых платформ можно найти фразу: "Торговля опционами непременно влечет риск".

Идея о существовании нулевого риска является исключением, а не правилом, поскольку ноль не может быть хорошей аппроксимацией чего-либо (Bouchaud,1996). В некоторых случаях чувство полной защищенности и наличия идеального хеджирования стать роковым и привести к серьезным убыткам. Это очень важная составляющая для адекватного понимания происходящего на финансовых рынках. Данная проблема является неотъемленмой частью современного риск-менеджмента. Например, формула Блэка-Шоулса позволяет, в целом, застраховаться от риска путем составления оптимального портфеля, вместо нахождения определенной хеджирующей стратегии, что было очень популярно в 1980 годы. Идея данного метода заключалась в продаже определенной бумаг в портфеле в моменты флуктуаций рынка. Однако, в течение кризиса 1987 года такая стратегия оказалась крайне неэффективной, так как распределение Гаусса абсолютно не отражает подобной реальности, и идея нулевого риска становится абсурдной.

Итоги проделанной работы

- путем изучения различных источников по финансовой математике были кратко изучены основные стохастические процессы, использующиеся в моделировании современных финансовых моделей, связанных с реальными опционами;
- были построенэы примеры сравнения цен опционов в случае вычисления по формуле Блэка-Шоулса и путем моделирования цен активов для различных параметров.

Приложение

```
######### Ariphmetic Browning Motion ########
alpha1=0.1; sigma1=0.5; T=1; n=2^(12); X0=1;alpha2=0.2; sigma2=1;alpha3=0.3; sigma3=2

#######################Generate 1 trajectory
dt=T/n
t=seq(0,T,by=dt)
x1=c(X0,alpha1*dt+sigma1*sqrt(dt)*rnorm(n,mean=0,sd=1))
x2=c(X0,alpha2*dt+sigma2*sqrt(dt)*rnorm(n,mean=0,sd=1))
x3=c(X0,alpha3*dt+sigma3*sqrt(dt)*rnorm(n,mean=0,sd=1))
Xt1=cumsum(x1)
Xt2=cumsum(x2)
Xt3=cumsum(x3)
fit1 <- glm(Xt1~x1)
co <- coef(fit1)
abline(fit1, col="green", lwd=1)
fit2 <- glm(Xt2~x2)
co <- coef(fit2)
abline(fit2, col="blue", lwd=1)
fit3 <- glm(Xt3~x3)
co <- coef(fit3)
abline(fit3, col="red", lwd=1)
plot(t,Xt1,type='l',xlab="", ylab = "", col="green", ylim = c(0,5))
lines(t,Xt2,type='l',xlab="", ylab = "", col="blue")
lines(t,Xt3,type='l',xlab="", ylab = "", col="red")
legend("topright", legend=c("alpha = 0.1, sigma = 0.5","alpha = 0.2, sigma = 1","alpha = 0.3, sigma = 2")
col=c("green", "blue","red"), lty=1, cex=0.8)

#####Geometric Browning Motion#####
library(sde)
library(ggplot2)
?GBM
I=50
mu = 0.5; # drift parametr
sigma = 0.7; # volatility of the process
P0 = 50; # intitial price
T = 5 # time
nt = 1000; # quantity of trajectories
n = 2 ^ (15) # quantity of points
#############Generate nt trajectories
dt = T/n;
t = seq(0, T, by = dt)
X = matrix(rep(0, length(t) * nt), nrow = nt)
for (i in 1:nt) {X[i,] = GBM(x = P0, r = mu, sigma = sigma, T = T, N = n)}
##Plot trajectories
ymax = max(X); ymin = min(X) #bounds for simulated prices
plot(t , X[1,], t='l', ylim = c(ymin, ymax), col = 1, ylab = "", xlab = "")
for(i in 2 : nt){lines(t,X[i,], t = 'l', ylim = c(ymin, ymax),col = i)}

hist(X,breaks = 550, xlim = c(0,1400), ylim = c(0,664000), col="grey", xlab = "", ylab = "", main = "", 
plot(density(X), lty = 1, lwd = 2, col = "black",xlim = c(0,16450), ylim = c(0,0.006), xlab="", ylab="", 
polygon(density(X), col = "lightblue", border = "black")

mean(X)
sd(X)

z <- vector("numeric")
I=50
for(i in 1:nt)  {z[i] <- mean(X[i,]-I)} ### count payments
hist(z, breaks = 40, ylim = c(0,20), col = "grey", xlab = "", ylab = "", main = "")
plot(density(z),ylim = c(0,0.001), xlab="", ylab="", main="")
polygon(density(z), col = "lightblue", border = "black")

###Comparing payment with Black-Shouls ###

I1 = 50
P1 = mean(X)
rfree = 0.1
sigma1 = 0.5
T1=5

d1 <- (log(P1/I1) + rfree + ((sigma1^2)/2) * T1)/(sigma1*sqrt(T1))
d1
d2 <- d1 - sigma1 * sqrt(T1)
d2
Option <- P1 * pnorm(d1) - I1 * exp(-rfree * T1) * pnorm(d2)
Option
mean(z)
```

Список литературы

[Ширяев, 2016] **Ширяев А. Н.** Основы стохастической финансовой математики. Факты. Модели. – 2016. - Т.1.

[Alexander, 2000] **Alexander C.** A primer on the orthogonal GARCH model // Manuscript ISMA Centre, University of Reading, UK. – 2000. – Т. 2.

[Bouchaud, 2003] **Bouchaud Jean-Philippe/ Potters Mark.** Theory of Financial Risk and Derivative Pricing, UK. – 2003.

[Chevalier,Trigeorgis, 2011] **Chevalier-Roignant Benoît/Trigeorgis Lenos.** Competitive Strategy // The MIT Press Cambridge, Massachusetts. – 2011.

[Shreve, 1997] **Shreve Steve.** Stochastic Calculus and Finance. – 1997.

[Quigley, 2008] **Quigley Leo.** Statistical Analysis of the Log Returns of Financial Assets. – 2008.

[Brigo,Dalessandro,Neugebauer, 2003] **Brigo Damiano/Dalessandro Antonio/**
A Stochastic Processes Toolkit for Risk Management. – 2007.

[Morter,Peres, 2003] **Morter Peter/Peres Yuval.** Drift and the Risk-Free Rate // School of Mathematics, Georgia Institute of Technology, USA. – 2011.

[Gadidov,Spruill, 2010] **Gadidov Anda/Spruill M.C.** Browning Motion // Cambridge Press – 2010.

[Revuz,Yor, 1999] **Revuz Daniel/Yor Mark.** Browning Motion // Springer Press – 1999.

[Bouchaud, J.P. 1996] **Bouchaud, J.P./Iori,G./D.Sornette.** Risk – 1996.