

Министерство образования и науки РФ
ФГБОУ ВО "Государственный академический университет
гуманитарных наук"

Факультет Экономический

Магистерская программа Междисциплинарный анализ
социально-экономических процессов

Кафедра Математической экономики

Направление подготовки: 38.04.01 Экономика

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

На тему: Исследование модели Blume-Durlauf на графах
с произвольным распределением по степеням вершин

Студент: Петров И.В.

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., Леонидов А.В.

Рецензент:
к.ф.- м.н., Апенко С.М.

Содержание

1	Теоретическая часть	4
1.1	Модель Blume-Durlauf	4
1.2	Распределение Стьюдента	5
2	Исследовательская часть	6
2.1	Моделирование случайных величин	7
2.1.1	Метод Min-Cut	7
2.1.2	Рекуррентный метод	8
2.2	Модель Blume-Durlauf на графе	9
2.2.1	Случай полного графа	9
2.2.2	Случайный граф	12
2.2.3	Безмасштабные сети	14
	Заключение	20
	Список литературы	22
	Список иллюстраций	24
	Приложение 1	25
	Приложение 2	27

Введение

Для графов с произвольной структурой метод среднего поля не позволяет корректно описать поведение системы. Цель работы - на основании результатов более ранних исследований и численных экспериментов оценить корректность предложенных авторами (Bianconi, 2002), (Dorogovtsev et al., 2002) и (Leone et al., 2002) методов (annealed-приближение) и проверить гипотезу о том, что для случайных графов с произвольным распределением по степеням вершин и распределением ошибок вида распределения Стьюдента (в отличии от указанных работ, где в качестве функции распределения случайной компоненты используется логистическое распределение или, что эквивалентно, свертка функций распределения экстремальных значений (Гумбеля)) метод среднего поля, в отличии от annealed-приближения, не дает точного описания поведения модели Blume-Durlauf. В рамках работы были рассмотрены 3 случая:

1. Полный граф;
2. Случайный граф;
3. Безмасштабная сеть.

Для достижения поставленной цели необходимо было выполнить следующие задачи:

1. Проверка теоретических результатов, достигнутых в (Bianconi, 2002), (Dorogovtsev et al., 2002) и (Leone et al., 2002);
2. Исследование полученных в указанных выше работах результатов для расширенной модели Barabasi-Albert (одна из моделей безмасштабных сетей)
3. Исследование модели Blume-Durlauf со случайной компонентой в виде свертки распределений Стьюдента для избранных моделей графов

1 Теоретическая часть

1.1 Модель Blume-Durlauf

Традиционная экономическая наука рассматривает экономические явления посредством подхода «репрезентативного агента», где гетерогенные предпочтения отдельных участников экономических отношений заменяются кумулятивным (или средним) значением величины. Предполагается, что агенты принимают решение рационально и изолированно друг от друга - взаимодействие между агентами обычно игнорируется. Однако необходимость учета взаимодействий кажется достаточно очевидной: подражание (или имитация), последствия социального давления (влияние через силу, власть или авторитет) постоянно наблюдаются в обществе и такие явления как тренды, мода или другие коллективные процессы было бы очень трудно понять, если бы экономические агенты были действительно безразличны к поведению других людей.

В качестве одной из альтернатив устоявшемуся подходу в (Blume et al., 2003) была предложена модель для описания указанных выше явлений. В данной работе она будет исследоваться в следующей постановке.

Пусть каждому агенту i сопоставляется бинарный выбор, результат которого обозначается через $s_i = -1, 1$. Решение агента i зависит от двух различных факторов:

1. Его личное предпочтение, измеряемое вещественными переменными переменная $f_i \in (-\text{inf}, +\text{inf})$, которая считается независимой от времени и распределена в соответствии с определенным p.d.f. Большие положительные f означает сильную склонность к принятию решению $s = 1$, а большие отрицательные f - сильное предпочтение $s = -1$;
2. влияние "социального давления" или "подражания": на каждого агента i влияет предыдущее решение, а также решение, сделанное определенным числом других агентов j в его «окрестности». Влияние j на i принимается равным $J_{ij}s_j$, которое добавляется к f_i . В данной работе

рассматривается случай, когда $J_{ij} = 1$, то есть решение агента j например, купить некий товар, усиливает привлекательность данного продукта и для агента i .

1.2 Распределение Стьюдента

В оригинальной работе рассматривался случай, когда f были распределены по Гумбелю (одно из основополагающих распределений в теории экстремальных значений). В таком варианте данная модель связана с широко изученной теоретико-игровой концепцией равновесия дискретного отклика, а кроме того, свертка распределений Гумбеля (ее результат - логистическое распределение) удовлетворяет свойству независимости от посторонних альтернатив. И хотя такой выбор влечет за собой параллель с так называемой моделью Изинга в случайном поле (Random Field Ising Model, RFIM) и все сопутствующие результаты и выводы, но как было отмечено в (Bouchaud, 2013), глубоких причин для выбора распределения Гумбеля не имеется.

2 Исследовательская часть

Отсутствие популярности темы данной выпускной квалификационной работы в кругах научного сообщества, вероятно, определяется некоторыми трудностями, которые могут иметь как аналитический характер, так и технический (при попытке поиска решения данной модели методами численного моделирования).

Особенности аналитического решения модели хорошо изучены физиками и, как показано, например, в (Dorogovtsev et al., 2007), точное решение не всегда удается найти в замкнутой форме (closed-form solution), и вид уравнений может меняться в зависимости от того, какую система рассматривается: полный граф или произвольная сеть.

В случае полного графа решение может быть найдено используя равновесие Нэша (Blume et al., 2003) и принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} m &= \tanh(g(m)) \\ g(m) &= \log F(m) - \log(1 - F(m)) \end{aligned}$$

В случае произвольного распределения степеней вершин графа, решение дается так называемым "annealed приближением" (Bianconi, 2002), (Dorogovtsev et al., 2007):

$$M_i = \tanh[\beta J s_i M_w]$$

где

$$M_w \equiv (z_i N)^{-1} \sum_j s_j M_j$$

является решением уравнения

$$M_i = \frac{1}{z_i} \sum_s P(s) s \tanh[\beta J s_i M_w]$$

2.1 Моделирование случайных величин

2.1.1 Метод Min-Cut

В 1975 в работе (Picard et al., 1975) было доказано, что равновесное состояние модели Изинга в случайном поле можно найти за полиномиальное время, решая соответствующую комбинаторную задачу оптимизации. Все доказательства, необходимые для обоснования корректности используемого ниже алгоритма и полиномиальные оценки по числу операций, необходимых для нахождения равновесного состояния, могут быть найдены, например, в книге (Cormen et al., 1990).

При поиске равновесной конфигурации RFIM с минимальной энергией с помощью метода Min-Cut цель состоит в том, чтобы найти минимальный набор ребер необходимых для потери связности графа.

(s,t) -разрезом (англ. (s,t) -cut) в графе G называется пара множеств S, T , удовлетворяющих условиям:

1. $s \in S, t \in T$
2. $S = V \setminus T$

Пусть с каждым ребром $(u,v) \in E$ ассоциировано некоторое неотрицательное число $c(u,v) \geq 0$ - пропускная способность. Тогда величиной разреза называется сумма пропускных способностей всех ребер, один конец которых находится в множестве S , а другой — в множестве T :

$$c(S,T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u,v)$$

Задача состоит в нахождении минимального разреза на графе (или максимального потока, двойственность этих задач - основной результат так называемой теоремы Форда — Фалкерсона (Ford, 1956)), являющегося некоторым преобразованием имеющейся системы. В случае модели RFIM под "ребрами" понимается как физические взаимодействия между ближайшими соседями, характеризующееся константой J , так и вспомогательные связи, которые соединяют каждый спин с одним из двух внешних фиксированных спинов $s^+ = 1$ и $s^- = -1$. Эти вспомогательные связи используются для

выражения случайного внешнего магнитного поля в виде ферромагнитных взаимодействий: если спин s_i находится под воздействием случайного поля $h_i > 0$ ($h_i < 0$), он соединяется ребром со спином s^+ (s^- соответственно) с весом, равном величине $|h_i|$. На этом преобразования заканчиваются.

2.1.2 Рекуррентный метод

Общим для изложенных методов является следующее: они минимизируют некоторый функционал, связанный с сетью. В теории игр существует отдельный раздел, посвященный такого рода моделям, а именно - потенциальные игры. Игра считается потенциальной, если стимул всех игроков изменить свою стратегию может быть выражен с помощью одной глобальной функции, называемой потенциальной функцией.

Хотя доказывается (Bouchaud, 2013), что между моделью Blume-Durlauf и моделью Изинга в случайном поле при некоторых параметрах имеется аналитическое соответствие, которое можно провести и в терминах потенциальных игр и пытаться интерпретировать результаты из области физики с экономической точки зрения, такого рода предпосылок (вроде распределения по конфигурациям или того, что равновесное состояние соответствует минимуму некоторого функционала от конфигурации системы) модель в общей формулировке не содержит.

В этой связи в рамках исследования данной модели было решено воспользоваться именно рекуррентным методом, так как он не налагает никаких ограничений на параметры модели (вроде тех, что возникают при использовании метода Монте-Карло). Кроме того, было решено сравнить полученные данным методом результаты с моделированием методом "Min-Cut" с той целью, сравнить полученные результаты с классическими. От метода Монте-Карло было решено отказаться. Как показано, например, в (Newman et al., 1996) с помощью данного метода было проведено множество экспериментов, однако эти эксперименты оказались очень трудными, а их результаты - неубедительны из-за чрезвычайно медленной динамики системы.

2.2 Модель Blume-Durlauf на графе

2.2.1 Случай полного графа

Итак, в данной работе рассматривается модель, где полезность i -го агента определяется как:

$$U_i(s_i) = \sum_{j \neq i} J s_i s_j + f(s_i)$$
$$s_i \in \{-1, 1\}, f(s_i) - i.i.d$$

В случае полного графа рассмотрим равновесие Нэша, отвечающее ситуации, когда ожидания агентов согласованы, т.е. все ожидаемые средние соседей рассматриваемого узла $\langle s_j \rangle$ равны, $\langle s_j \rangle = m$, и совпадают со средним значением $\langle s_i \rangle$. Тогда в равновесии (Blume et al., 2003)

$$m = \tanh(g(m))$$
$$g(m) = \log F(m) - \log(1 - F(m))$$
$$F(m) = \int_{-\infty}^m \int_{-\infty}^{\infty} f(m-x)g(x)dx dm$$

В данном разделе рассматриваются три случая:

$$f(m) = g(x) = \frac{e^{(-\frac{x}{\beta} - e^{-\frac{x}{\beta}})}}{\beta} ()$$
$$f(m) = g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x)^2}{2\sigma^2}} ()$$
$$f(m) = g(x) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi} \Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} ()$$

В случае распределения Гумбеля есть аналитическое решение, что позволяет сверить результаты (Рис. 1). Очевидно, результаты для выбранных распределений случайных компонент по разному зависят от параметров распределения (Рис.1,2).

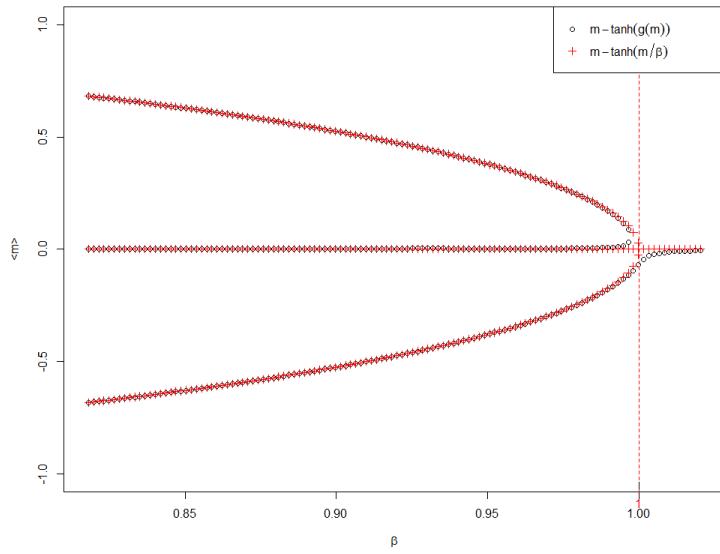


Рис. 1: Решение "Mean field" для полного графа (логистическое распределение)

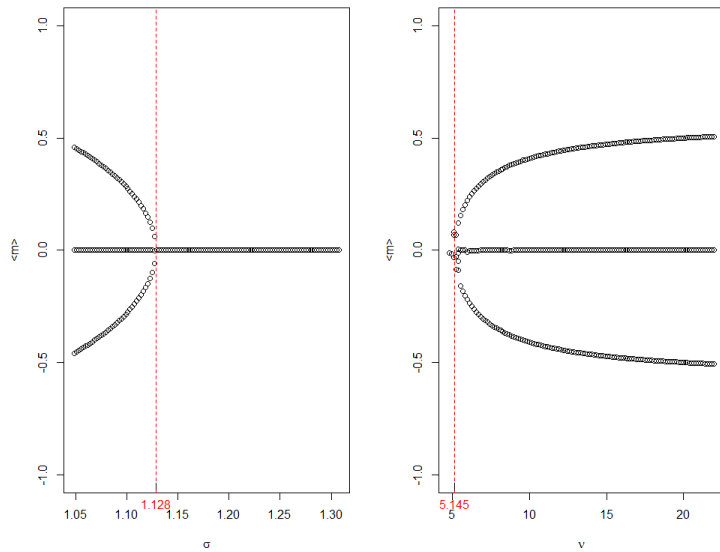


Рис. 2: Решение "Mean field" для полного графа: 1) случай нормального распределения; 2) Распределение Стьюдента)

Распределения, возникающие при критических значениях параметров (при переходе системы из упорядоченного состояния в неупорядоченное) имеют похожую форму, однако у сверток распределений Стьюдента и Гумбеля наблюдаются более тяжелые хвосты по сравнению с нормальным распределением.

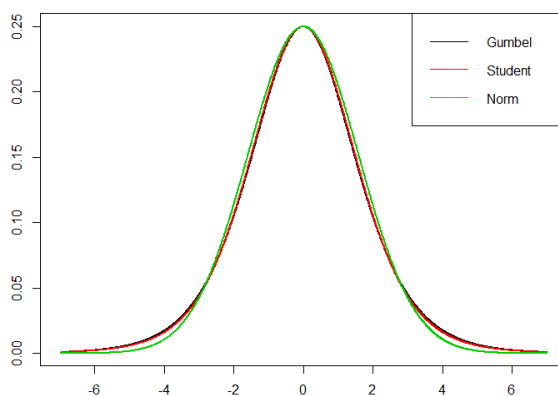


Рис. 3: Сравнение распределений при критических параметрах

Для более корректного анализа результатов необходимо представить их в виде зависимости от единой величины - таковой была выбрана дисперсия распределений случайных компонент (Рис. 4). И действительно, как отмечено ранее, исходя из полученных результатов можно заключить, что критический переход в модели для распределений Стьюдента и Гумбеля достигается при одинаковых значениях дисперсии данных распределений.

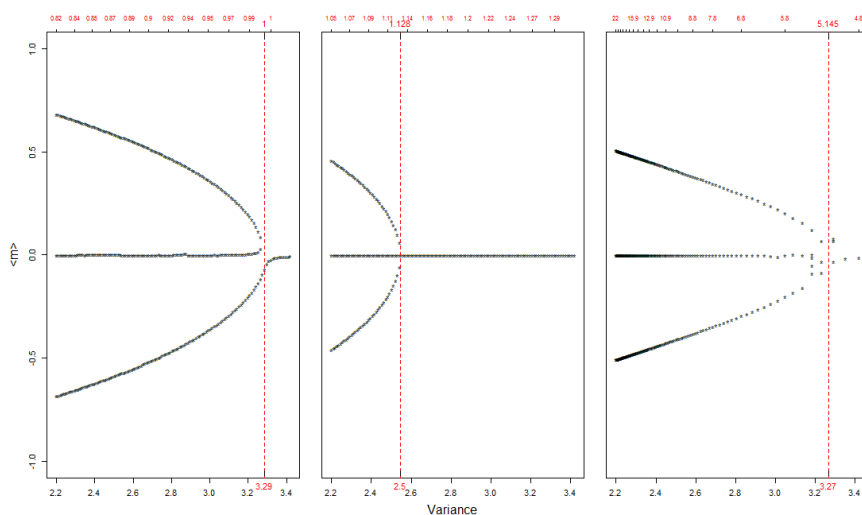


Рис. 4: Зависимость $\langle m \rangle$ от дисперсии распределения

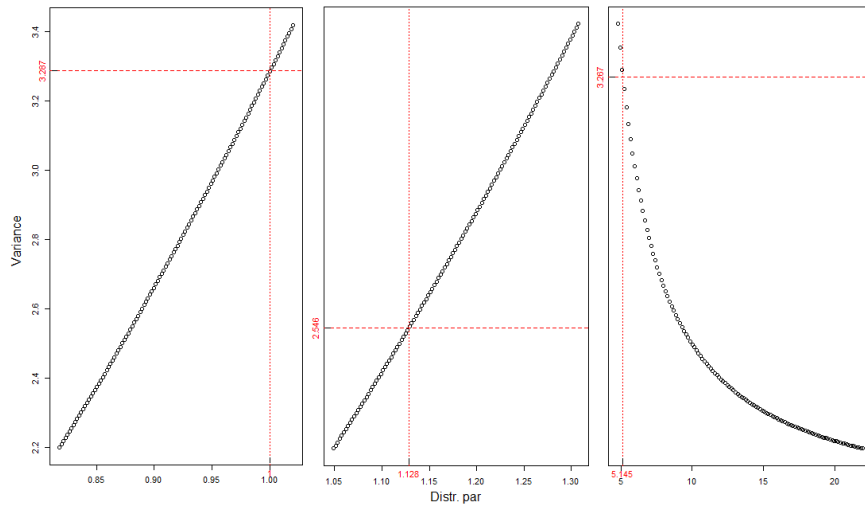


Рис. 5: Дисперсий распределений: 1) Логистическое; 2) Нормальное; 3) Стьюдента

2.2.2 Случайный граф

Целью науки, занимающейся исследованием социальных или экономических сетей ("Network Science" или "Complex Networks") является создание математических моделей, которые воспроизводят свойства наблюдаемых графов связей между людьми (агентами). Большинство реальных сетей не имеют регулярности кристаллической решетки или некоторой иной очевидной структуры (как например, в случае деревьев или полного графа). Чаще всего, на первый взгляд, они выглядят так, как будто были построены абсолютно случайным образом. Случайная сетевая теория охватывает эту кажущуюся случайность, строя и характеризуя сети, которые действительно случайны. Сеть, обладающая такими свойствами называется случайным графом или случайной сетью. Математики, Р. Erdos и А. Renyi сыграли важную роль в понимании свойств этих сетей и теперь модель воспроизведения таких графов носит название модель Erdos-Renyi.

Точной формой распределения по степеням вершин случайного графа является биномиальное распределение:

$$p_k = \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-1-k}$$

При $N \gg \langle k \rangle$ биномиальное распределение хорошо аппроксимируется распределением Пуассона:

$$p_k = e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!}$$

Поскольку обе формулы описывают одно и то же распределение, они имеют одинаковые свойства, но они выражаются через разные параметры: биномиальное распределение зависит от p и N , а распределение Пуассона - имеет только один параметр, $\langle k \rangle$. Именно эта простота делает форму Пуассона предпочтительной в аналитических расчетах, в то время как биномиальное распределение удобнее использовать при численном моделировании.

Аналитическое решение

Для графов с произвольной структурой метод, использованный в предыдущем разделе не позволяет корректно описать поведение системы. Решение для него, как было указано ранее, было найдено в виде:

$$M_i = \tanh[\beta J s_i M_w]$$

где

$$M_w \equiv (z_i N)^{-1} \sum_j s_j M_j$$

является решением уравнения

$$M_i = \frac{1}{z_i} \sum_s P(s) s \tanh[\beta J s_i M_w]$$

Как было сказано, ключевая особенность распределения Пуассона заключается в том, что его свойства не зависят от размера сети и зависят от одного параметра - средней степени $\langle k \rangle$. Для численного поиска решения уравнений такая постановка некорректна, так как основным результатом

работ (Bianconi, 2002), (Dorogovtsev et al., 2002) и (Leone et al., 2002) как раз и является явная зависимость решения от числа вершин графа (N). На рисунке 6 представлены результаты для различного числа вершин графа и различных параметров биномиального распределения:

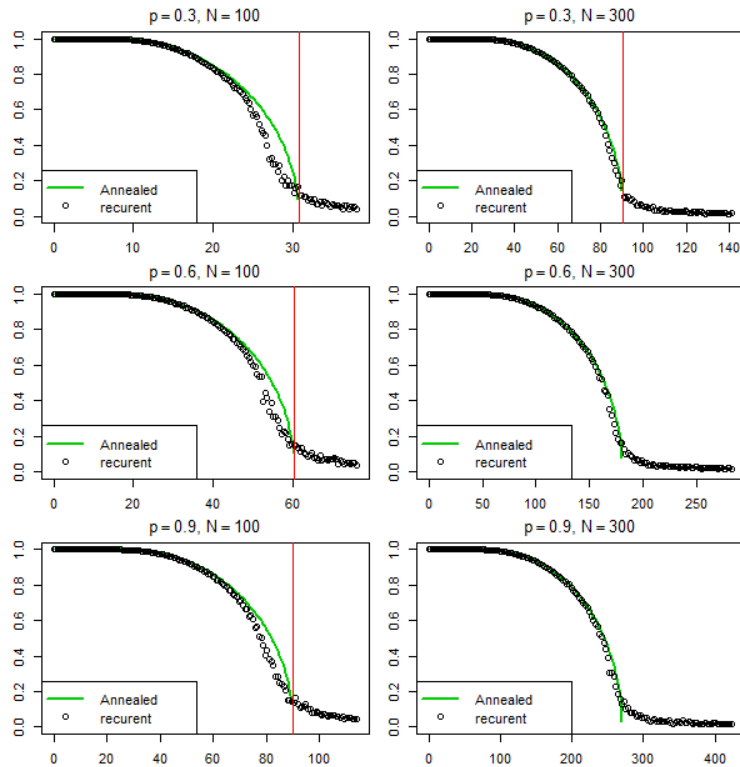


Рис. 6: $\langle m \rangle$ в модели ER (логистическое распределение)

Моделирование

Результаты численного моделирования продемонстрированы на рисунку 7. Моделирование, как было заявлено, выполнено с помощью двух методов: рекуррентного и методом поиска минимального разреза на графе. Результаты совпадают в пределе по N (Рис. 7).

2.2.3 Безмасштабные сети

Модель Barabasi-Albert

На исследование сетей обращено значительное внимание со стороны научной общественности благодаря эффективности их использования как способа представления многих сложных систем, существующих в реальном мире, от социальных до технологических, инфраструктурных, биологических и

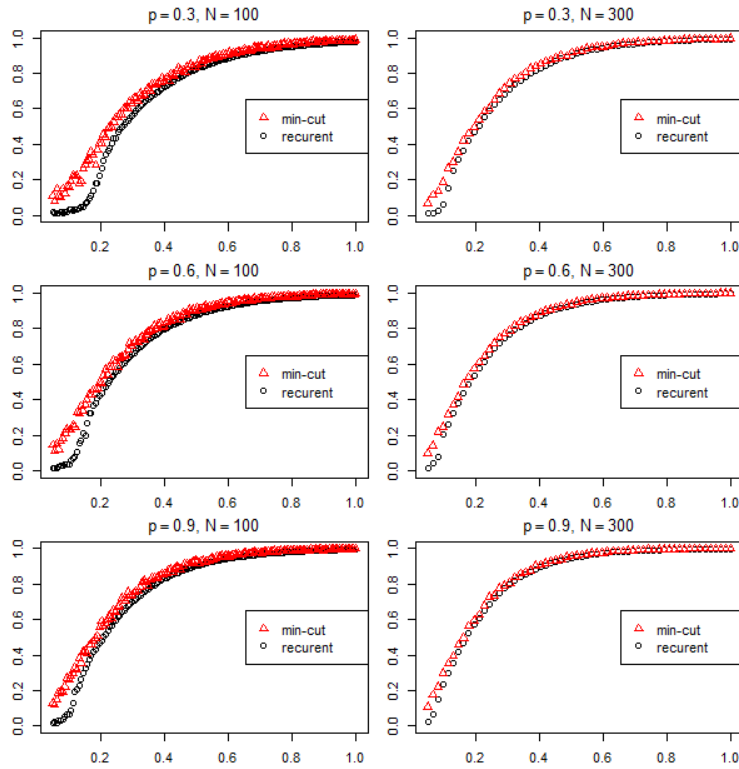


Рис. 7: $\langle m \rangle$ в модели ER (распределение Стьюдента)

эпидемиологических систем. Несмотря на кажущееся различия, эти сети демонстрируют общие черты: они развиваются и растут, и многие из них демонстрируют гетерогенные распределения степеней вершин. Предложен ряд моделей для учета растущего характера сетей и выявления роли различных процессов, которые влияют на структуру сети. Возможно, наиболее известными являются класс моделей, основанных на предпочтительном присоединении, в котором новые вершины присоединяются к существующим вершинам с вероятностями в зависимости от их степеней. Когда вероятность присоединения линейна по степени вершины, полученное распределение следует степенному закону ("power law"): $p_k \sim k^{-\gamma}$. Сети с таким распределением по степеням вершин принято называть "безмасштабными" ("Scale-Free Network") (Barabasi, 2016). Этот случай представляет особый интерес, поскольку во многих сетях, от графа цитирования до графа сети Интернет наблюдаются распределения, которые похожи на степенной закон.

Расширенная версия модели

В то время как модель преимущественного присоединения отражает качественные особенности эволюции сети, она является упрощенной моделью с очевидными ограничениями:

- она прогнозирует значение степени $\gamma = 3$, тогда как большинство сетей реального мира имеют показатели в диапазоне $2 < \gamma < 4$;
- она игнорирует ряд элементарных процессов, которые играют важную роль в эволюции многих реальных сетей, таких как добавление внутренних ребер, удаление ребер или узлов, а также случайную компоненту.

Рост и эволюция социальных и экономических сетей вызвали значительный интерес со стороны научного сообщества, и было предложено множество алгоритмов с целью объяснить их наблюдаемые распределения степеней вершин. В этих моделях были включены различные микроскопические процессы, в том числе добавление вершин и ребер, fitness (вероятность получения узлом первого ребра) и удаление узлов и ребер. Однако большинство моделей сосредоточены на конкретных комбинациях этих процессов и параметризуют их таким образом, чтобы затруднять выяснение роли отдельных элементарных механизмов. В связи с этим (Ghoshal et al., 2013) сформулировали и решили модель, которая включает в себя минимальные процессы эволюции сети. Некоторые способствуют росту, например, образование связей между существующей парой вершин, в то время как другие - удалению: удаление узла со всеми исходящими из него ребрами или удаление ребра между парой вершин.

Parameter	Role
c	Number of external edges added
m	Number of internal edges added/removed
r	Probability of removing a vertex
q	Probability of removing an edge
a	Controls random external edge addition
s	Controls random internal edge addition
b	Controls preferential external edge addition
t	Controls preferential internal edge addition

Рис. 8: Список параметров в расширенной модели ВА (Ghoshal et al., 2013)

Соответственно, существуют два варианта реализации данной модели - модель роста (т.е. вершины никогда не удаляются), и модель с удалением вершин и ребер. В данной работе рассмотрен первый вариант. При таком упрощении и после некоторых преобразований (указаны в (Ghoshal et al., 2013)) можно показать, что это приводит к распределению степени:

$$p_k = \frac{B(k + \frac{\theta}{\beta}, 1 + \frac{1}{\beta})}{B(c + \frac{\theta}{\beta}, \frac{1}{\beta})} \quad (1)$$

где $B(x, y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x + y)$ - бета-функция. Для $x \gg 1$ имеем $B(x, y) \approx x^{-y}$ и, следовательно, асимптотически получаем смещенный степенной закон $p_k \sim (k + k_0)^{-\gamma}$, где

$$\gamma = 1 + \frac{1}{\beta} = 2 + \frac{(s(a + b(c + 2m)) + 2tc(a + b(m + c)))}{(bsc + 2atm + 2bt(m + c)(c + 2m))} \quad (2)$$

$$k_0 = \frac{\theta}{\beta} = \frac{4bmc(c + m) + as(c + 2m) + 2ac(c + m)t}{bsc + 2atm + 2bt(c + m)(c + 2m)} \quad (3)$$

В таблице представлено решение этих уравнений при различных параметрах, P - предпочтительное присоединение (Preferential attachment), R - случайное присоединение (Random attachment), индексы e и i характеризуют часть сети, к которой относиться способ приедениения - внешнюю (external) или внутреннюю (internal) соответственно.

Parameters	Evolution Process	Exponent γ	Range	Shift k_0
c, b	P_e	3	—	0
c, b, a	$P_e + R_e$	$3 + \frac{a}{bc}$	$(3, \infty)$	$\frac{a}{b}$
c, m, b, s	$P_e + R_i$	$3 + \frac{2m}{c}$	$(3, 3 + \frac{2m}{c})$	$\frac{4m(c+m)}{c}$
c, m, b, a, s	$P_e + R_e + R_i$	$3 + \frac{a}{bc} + \frac{2m}{c}$	$(3, \infty)$	$\frac{4bm(c+m) + a(c+2m)}{bc}$
c, m, b, t	$P_e + P_i$	$2 + \frac{c}{c+2m}$	$(2, 3)$	0
c, m, t, a	$P_i + R_e$	$2 + \frac{c}{m}$	$(2, 2 + \frac{c}{m})$	$\frac{c(c+m)}{m}$
c, m, t, a, s	$P_i + R_e + R_i$	$2 + \frac{c}{m} + \frac{s}{2mt}$	$(2, \infty)$	$\frac{s(c+2m) + 2ct(c+m)}{2mt}$
c, m, b, t, a	$P_e + P_i + R_e$	$2 + \frac{c[a+b(c+m)]}{am+b(c+m)(c+2m)}$	$(2, 2 + \frac{c}{m})$	$\frac{ac(c+m)}{am+b(c+m)(c+2m)}$
c, m, b, t, s	$P_e + P_i + R_i$	$2 + \frac{s(c+2m) + 2ct(c+m)}{cs+2t(c+m)(c+2m)}$	$(2, 3 + \frac{2m}{c})$	$\frac{4ms(c+m)}{cs+2t(c+m)(c+2m)}$

Рис. 9: Зависимость характеристик сети ВА от параметров модели (Ghoshal et al., 2013)

Аналитическое решение

Результаты решения модели в annealed-приближении представлены на Рис. 10. совпадение результатов возникает только в случае $\gamma = 3$, в иных случаях различия существенны.

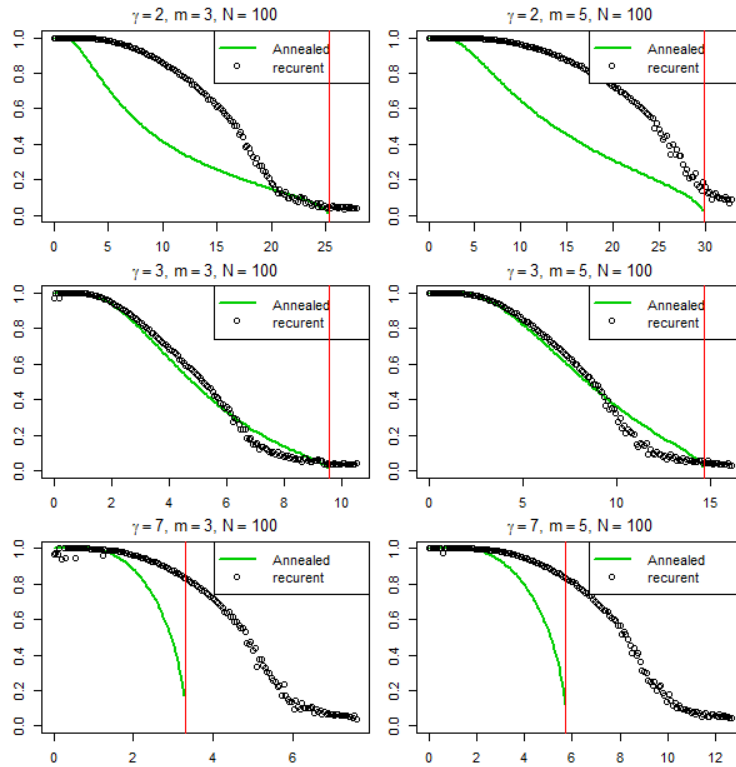


Рис. 10: $\langle m \rangle$ в модели ВА (логистическое распределение)

Моделирование

Результаты численного моделирования продемонстрированы на Рис. 11. Интересно, что увеличение числа агентов не приводит к сближению результатов численного моделирования методом Min-Cut и рекуррентным методом.

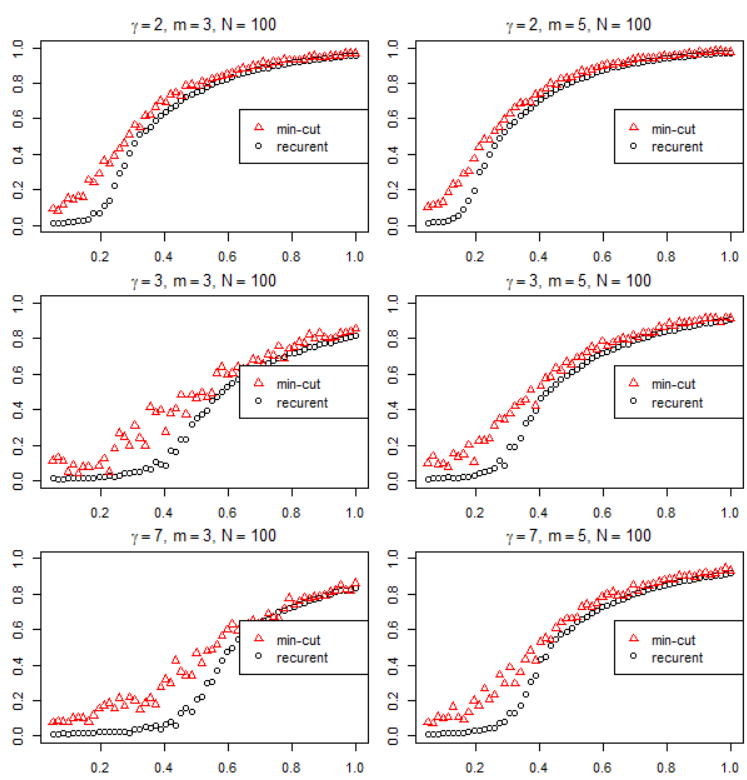


Рис. 11: $\langle m \rangle$ в модели ВА (распределение стьюдента)

Заключение

Целью данной работы являлось исследование модели Blume-Durlauf на графах с произвольным распределением по степеням вершин, вследствие которого были получены следующие результаты:

1. На языке программирования R реализован алгоритм поиска равновесного состояния модели с помощью преобразования исходной системы в некоторый граф и нахождения минимального разреза. Сделано это с целью численного моделирования системы, т.к. широко распространенный метод Монте-Карло (алгоритм Метрополиса) в данном случае оказывается менее точен, подробнее об этом изложено в (Newman et al., 1996);
2. На языке программирования R реализован алгоритм построения расширенной модели Barabasi-Albert;
3. На основе этого найдены численные решения annealed-приближения для моделей ER и BA. Хорошие результаты достигаются при $\gamma = 3, m = 5$, в остальных случаях - существенные различия между решением уравнения и численным моделированием;
4. Для случая распределения ошибок по Стьюденту реализовано численное моделирование. Annealed-приближение не было реализовано. Данный вопрос был исследован и изложен ряд причин, в силу которых на данном языке программирования эта задача не выполнима;

Основные результаты и критические замечания к проделанной работе могут иметь технический и коцептуальный характер. К техническим можно отнести следующее. Работы (Bianconi, 2002), (Dorogovtsev et al., 2002) и (Leone et al., 2002) имели в своем основании численные результаты, проделанные в (Aleksiejuk et al., 2002) и анализировали точность своих решений на основании моделирования графа Barabasi-Albert с $m = 5$ и $\gamma = 3$ (см., например, (Bianconi, 2002)). В данной работе было показано, что решение уравнения, впервые возникшего в (Bianconi, 2002) действительно совпадает с указанным в (Aleksiejuk et al., 2002) численными экспериментами. Авторы также дают общее решение модели, в частности для модели Barabasi-Albert

с произвольным γ , однако - и это один из результатов работы - решение теряет приемлимую точность тем больше, чем дальше распределение по степеням вершин в модели ВА отходит от $\gamma = 3$.

Кроме того, было показано, что предложенное решение хорошо описывают динамику модели Erdos–Renyi на всем множестве значений параметра модели. В целом, во всех случаях случайная компонента, с распределением, имеющим достаточно большую дисперсию заставляет переходить в систему из упорядоченного состояния в неупорядоченное, тем самым демонстрируя снижение эффективности кооперации между агентами. Это достаточно предсказуемый результат. Также, в случае модели Erdos–Renyi была продемонстрирована обратная зависимость между точкой перехода системы из одного состояние в другое и числом вершин (агентов) графа.

Из полученных результатов было-бы неправильно делать глубокие выводы и искать экономическую интерпретацию: как отмечено в (Полтерович, 2016), "эффективность кооперации — не исчерпывающая характеристика сотрудничества, она лишь отражает умение координировать свои действия с действиями других для достижения заданной цели".

Список литературы

- Cormen T. H. , Leiserson C. E. , Rivest R. L.** Introduction to Algorithms // MIT Press, Cambridge, Mass. - 1990.
- Picard J.-C., Ratliff H. D.** Minimum Cuts and Related Problems // Networks 4, 357. - 1975.
- Bouchaud, JP.** Crises and Collective Socio-Economic Phenomena: Simple Models and Challenges // J Stat Phys 151: 567. - 2013
- Newman, M.E.J., Barkema, G.T.** Monte Carlo Study of the Random-Field Ising Model // Physical Review. E, Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics, volume 53, issue 1, pp. 393 - 404. - 1996.
- Aleksiejuk, A., J. A. Holyst, and D. Stauffer** Ferromagnetic phase transition in Barabasi-Albert networks // Physica A 310, 260. - 2002.
- Dorogovtsev, S. N., A. V. Goltsev, and J. F. F. Mendes** Ising model on networks with an arbitrary distribution of connections // Phys. Rev. E 66, 016104. - 2002.
- Leone, M., A. Vazquez, A. Vespignani, and R. Zecchina** Ferromagnetic ordering in graphs with arbitrary degree distribution // Eur. Phys. J. B 28, 191. - 2002.
- Bianconi, G.** Mean field solution of the Ising model on a Barabasi-Albert network // Phys. Lett. A 303, 166. - 2002.
- Dorogovtsev, Sergey and Goltsev, Alexander and Mendes, José Fernando** Critical phenomena in complex networks // Review of Modern Physics 80(4) · April 2007. - 2007.
- Lawrence Blume and Steven Durlauf** EQUILIBRIUM CONCEPTS FOR SOCIAL INTERACTION MODELS // Int. Game Theory Rev. 05, 193. - 2003.
- L.R.Ford Jr., Fulkerson D.R.** Maximal flow through a network // Canad. J. Math. 8, 399-404. - 1956.

Gourab Ghoshal, Liping Chi, Albert-László Barabási Uncovering the role of elementary processes in network evolution // Nature Scientific Reports volume 3, Article number: 2920. - 2013.

Полтерович В. Позитивное сотрудничество: факторы и механизмы эволюции // Вопросы экономики, №11. - 2016.

Albert-László Barabási Network Science // Cambridge, 475 pp. - 2016.

Список иллюстраций

1	Решение "Mean field" для полного графа (логистическое распределение)	10
2	Решение "Mean field" для полного графа: 1) случай нормального распределения; 2) Распределение Стьюдента)	10
3	Сравнение распределений при критических параметрах	11
4	Зависимость $\langle m \rangle$ от дисперсии распределения	11
5	Дисперсий распределений: 1) Логистическое; 2) Нормальное; 3) Стьюдента	12
6	$\langle m \rangle$ в модели ER (логистическое распределение)	14
7	$\langle m \rangle$ в модели ER (распределение Стьюдента)	15
8	Список параметров в расширенной модели BA (Ghoshal et al., 2013)	16
9	Зависимость характеристик сети BA от параметров модели (Ghoshal et al., 2013)	17
10	$\langle m \rangle$ в модели BA (логистическое распределение)	18
11	$\langle m \rangle$ в модели BA (распределение стьюдента)	19
12	Annealed-приближение в модели BA, $\gamma = 2$	25
13	Annealed-приближение в модели BA, $\gamma = 3$	25
14	Annealed-приближение в модели BA, $\gamma = 4$	26

Приложение 1

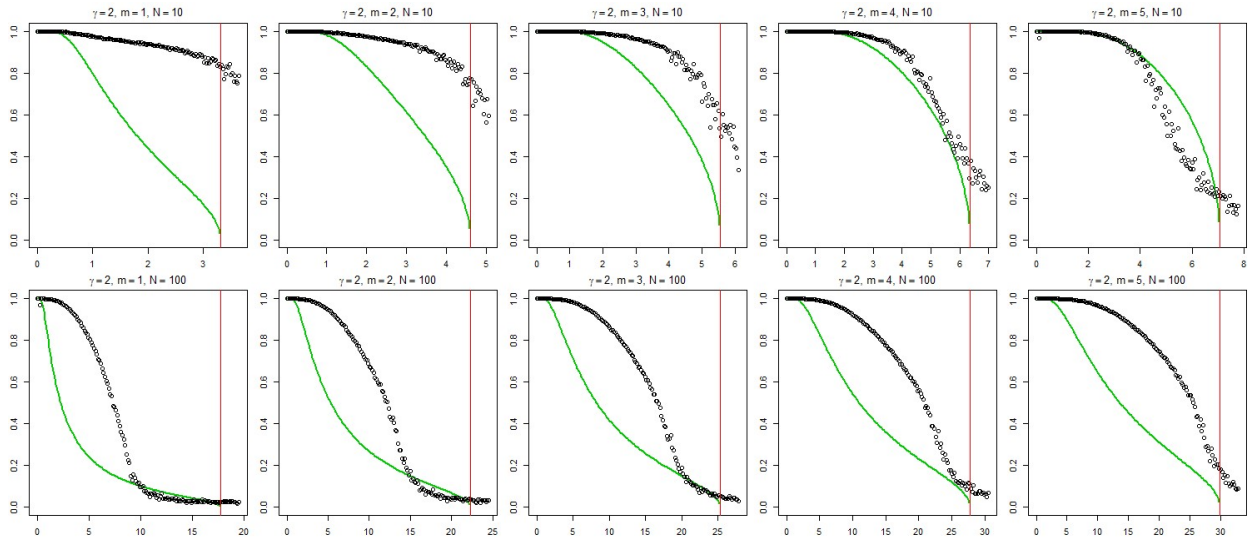


Рис. 12: Annealed-приближение в модели ВА, $\gamma = 2$

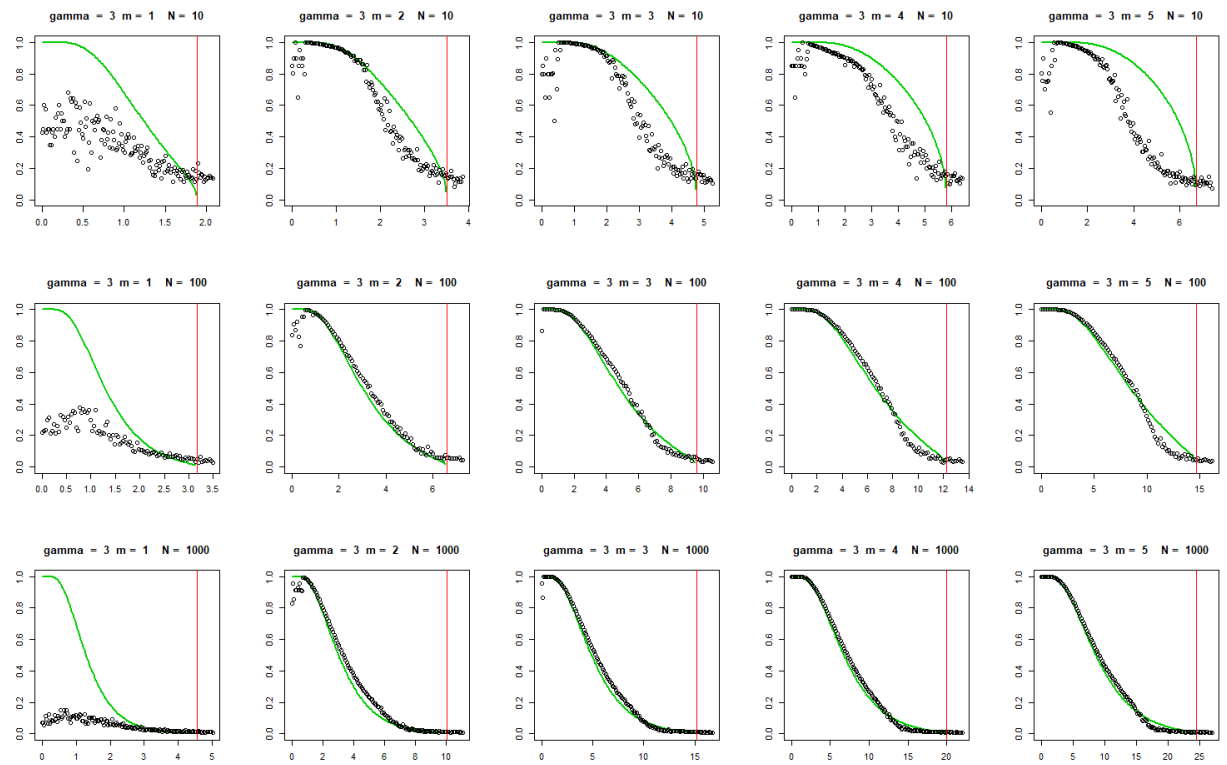


Рис. 13: Annealed-приближение в модели ВА, $\gamma = 3$

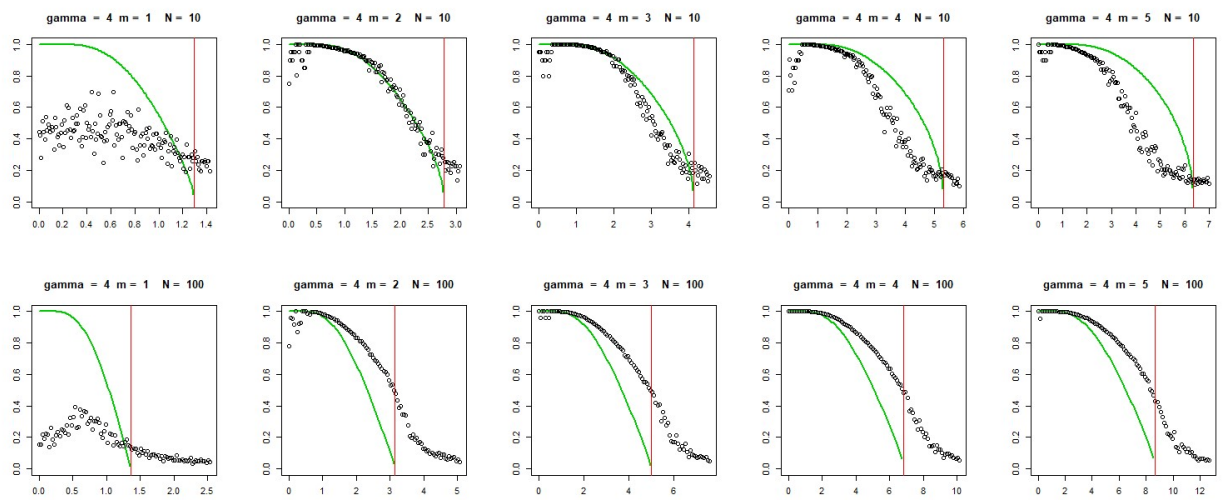


Рис. 14: Annealed-приближение в модели ВА, $\gamma = 4$

Приложение 2

```
##### Extended Barabasi-Albert Model: #####
if(nu>=3) {
b <- 1
s <- 10^(-10)
t <- 10^(-10)
c <- 0 # pairs of vertices already present in the graph and according to f_k add a single edge between them
m <- m_n
f_gamma <- function(a) {
nu - (2+(s*(a+b*(m+2*c))+2*t*m*(a+b*(c+m)))/(b*s*m + 2*a*t*c + 2*b*t*(c+m)*(m+2*c)))
}
a <- uniroot.all(f_gamma, c(0,30))
ff1 <- function(N, m, a, b, c, s, t) {
e <- rep(0,N)
s <- 0
adj <- matrix(0,nrow = N, ncol = N)
i <- m+1
if (a == 0) {a <- 10^(-10)}
for(i in (m+1):N) {
jj <- i
e <- colSums(adj)
# preferential attachment
for (mm in 1:m) {
p <- runif(1,0,1)
z <- 0
pi_k <- (a+b*e)/(a+b*mean(e[1:i]))
pi_k <- pi_k/max(sum(pi_k),1)
for (j in c(1:(i-1))[-jj] ) {
z <- pi_k[j]+z
if(z>p) break
}
adj[i,j] <- 1
adj[j,i] <- 1
jj <- c(jj,j)
}
if (c == 0) next
for (cc in 1:c) {
f_k <- (s+t*e[1:(i-1)])/max((s+t*mean(e[1:(i-1)])),1)
f_k <- f_k/max(sum(f_k),1)
p <- runif(1,0,1)
z <- 0
for (j_1 in c(1:(i-1))[-jj[1]] ) {
z <- f_k[j_1]+z
if(z>p) break
}
p <- runif(1,0,1)
z <- 0
for (j_2 in c(1:(i-1))[-c(jj[1], j_1)] ) {
z <- pi_k[j_1]+z
if(z>p) break
}
adj[j_1,j_2] <- 1
adj[j_2,j_1] <- 1
}
}
return(list(adjmatrix=adj,deg = colSums(adj) ))
}
} else {
a <- 10^(-10)
b <- 1
s <- 10^(-10)
t <- 10^(-10)
# c <- 0 # pairs of vertices already present in the graph and according to f_k add a single edge between them
m <- m_n
f_gamma <- function(c) {
nu - (2+(s*(a+b*(m+2*c))+2*t*m*(a+b*(c+m)))/(b*s*m + 2*a*t*c + 2*b*t*(c+m)*(m+2*c)))
}
c <- uniroot.all(f_gamma, c(0,100))
ff1 <- function(N, m, a, b, c, s, t) {
e <- rep(0,N)
s <- 0
adj <- matrix(0,nrow = N, ncol = N)
i <- m+1
if (a == 0) {a <- 10^(-10)}
for(i in (m+1):N) {
jj <- i
e <- colSums(adj)
# preferential attachment
for (mm in 1:m) {
```

```

p <- runif(1,0,1)
z <- 0
pi_k <- (a+b*e)/(a+b*mean(e[1:i]))
pi_k <- pi_k/max(sum(pi_k),1)
for (j in c(1:(i-1))[-jj] ) {
z <- pi_k[j]+z
if (z>p) break
}
adj[i,j] <- 1
adj[j,i] <- 1
jj <- c(jj,j)
}
if (c == 0) next
for (cc in 1:c) {
f_k <- (s+t*e[1:(i-1)]/max((s+t*mean(e[1:(i-1)])),1)
f_k <- f_k/max(sum(f_k),1)
p <- runif(1,0,1)
z <- 0
for (j_1 in c(1:(i-1))[-jj[1]] ) {
z <- f_k[j_1]+z
if (z>p) break
}
p <- runif(1,0,1)
z <- 0
for (j_2 in c(1:(i-1))[-c(jj[1], j_1)] ) {
z <- pi_k[j_1]+z
if (z>p) break
}
adj[j_1,j_2] <- 1
adj[j_2,j_1] <- 1
}
}
return(list(adjmatrix=adj,deg = colSums(adj)))
}
}

```

Analytical Solution

```

library(evd); library(rootSolve); library(data.table); library(foreach);
library(doParallel);
repeat_k <- 30; gamma_nu <- c(2.05); par(mar=c(2,2,2,1)); par(mfrow = c(3,5))
for (ggg in 1:length(gamma_nu)) {
for (ii in 1:4){
for (jjj in 1:5) {
N <- 10^(ii); m_n <- jjj; nu <- gamma_nu[ggg]
t_c1 <- 1/2*m_n*log(N)
kk <- seq(m_n,N,1)
p_k <- function(k) 2*m_n^2/k^nu
c <- 1/sum(p_k(kk))
p_k <- function(k) c*2*m_n^2/k^nu
p_k_mean <- function(k) p_k(k)*k
p_k_mean <- sum(p_k_mean(kk))
p_k_2 <- function(k) p_k(k)*k^2
p_k_2 <- sum(p_k_2(kk))
t_c <- 2/log((p_k_2+p_k_mean)/(p_k_2-p_k_mean))
t_c_exact <- 2/log(p_k_2/(p_k_2-2*p_k_mean))
t_c_3 <- p_k_mean*log(N)/4
f <- function(sd){
gradient( function(m) m-1/p_k_mean*sum(p_k(kk)*kk*tanh(1/sd*m*kk)), 0,
pert = 1e-9)
}; f <- Vectorize(f)
t_c_root <- uniroot.all(f, c(0.01,30), tol = 1e-12, n = 10^4)
cat(t_c, t_c_root, t_c_3, t_c1, t_c_exact)
sd_len <- c(150,150,150)[ii]
sd <- seq(10^(-6),1.1*max(t_c, t_c_root, t_c_3, t_c1, t_c_exact, na.rm = T),length.out = sd_len)
rt <- rep(2,5)
for (i in 1:length(sd)) {
f <- function(m) m-1/p_k_mean*sum(p_k(kk)*kk*tanh(1/sd[i]*m*kk)); f <- Vectorize(f)
a <- uniroot.all(f, c(-1, 1), tol = 1e-12, n = 10^3)
rt <- rbind(rt,a)
print(sd[i])
}
rt <- rt[-1,]
rt[t(apply(rt, 1, function(x) duplicated(x,MARGIN = 1)))] <- NA
rt_logis <- rt
for (i in 1:nrow(rt_logis)) {
rt_logis[i,] <- sapply(rt_logis[i,], function(x) sum(p_k(kk)*tanh(1/sd[i]*x*kk)))
}
graf <- ffl(N, m_n, a, b, c, s, t)
graf$deg <- colSums(graf$adjmatrix)
length(graf$deg)

```

```

sum(graf$deg)/2; (N-m_n)*m_n
p_k_mean; mean(graf$deg)
J <- graf$adjmatrix
f <- 0
F_t_max <- c(500,250,200)[ii]
F_t <- rep(0,F_t_max)
m_mean <- numeric()
m_teor <- numeric()
m_teor_graf <- numeric()
j <- 1
cores=detectCores(); cl <- makeCluster(cores[1]-1); registerDoParallel(cl)
m_mean = foreach(j=1:length(sd), .combine=rbind) %dopar% {
M <- numeric()
for(k in 1:repeat_k) {
s <- matrix(-1,ncol = (length(F_t)+1), nrow = N)
s[,1] <- c(rbinom(N,1,1/2))*2-1
for(i in 1:length(F_t)) {
s[,i+1] <- sign((J)%*%s[,i]*1 - (J)%*%s[,i]*(-1) + rlogis(N, 0, sd[j]))
}
M[k] <- mean(s[, (ncol(s)-50+1):ncol(s)])
}
return(mean(Mod(M)))
}
stopCluster(cl)
rt_logis[rt_logis==0] <- NA
obj = list(foo=0, bar=99, gamma=round(nu,1), m = m_n, N=N)
plot(x = sd, y = rt_logis[,1], ylim = c(0,1), t = "1",
main=bquote(paste(gamma == .(obj$gamma), ", " , m == .(obj$m), ", " , N == .(obj$N))),
lwd = 2, col = 0, xlab = "", ylab = "")
for(i in 2:ncol(rt_logis)) {
lines(x = sd, y = Mod(rt_logis[,i]), lwd = 2, col = 3)
}
points(y = Mod(m_mean), x=sd, pch = 1, col = 1,
ylim = c(-1,1))
abline(v=t_c_root, col=2)\}

##### Min-Cut #####
check_spins <- function(x) {
spins <- rep(0,N)
if(length(names(x)[na.omit(match(c("s","t"), names(x)))])=1){
if(names(x)[na.omit(match(c("s","t"), names(x)))]= "s") {
spins[as.numeric(names(x)[-na.omit(match(c("s","t"), names(x)))])] <- 1
spins <- (2*spins-1)
return(mean(spins))
} else {
spins[-as.numeric(names(x)[-na.omit(match(c("s","t"), names(x)))])] <- 1
spins <- (2*spins-1)
return(mean(spins))
}
} else {
return("ERROR")
}
}

cores=detectCores(); cl <- makeCluster(cores[1]-1); registerDoParallel(cl)
res = foreach(i=1:length(sd), .combine=rbind) %dopar% {
library(igraph)
library(evd)
m_all <- numeric()
for(k in 1:repeat_k) {
J <- matrix(mapply(function(x, i, j) {
if(i>=j) return(0)
else return(x)
}, J, row(J), col(J)), nrow = nrow(J))
#h <- rgev(N,0,sd[i],0) - rgev(N,0,sd[i],0)
#h <- rlogis(N, 0, sd[i])
#h <- rnorm(N, 0, sd[i])
h <- rt(N,sd[i]) - rt(N,sd[i])
w <- -h-1/2*rowSums(J-t(J))
s <- rep(0,N); t <- rep(0,N); s[w<0] <- -w[w<0]; t[w>0] <- w[w>0]
J2 <- cbind(rep(0, N), J,t); J2 <- rbind(c(0,s,0), J2, rep(0,N+2)); rownames(J2) <- c("s",1:N,"t"); colnames(J2) <-
JJ2 <- graph_from_adjacency_matrix(J2, mode = "directed", weighted = T)
a <- st_min_cuts(JJ2, source=V(JJ2)["s"], target=V(JJ2)["t"], capacity = E(JJ2)$weight)
if(length(a) != 0) m <- sapply(a$partition1s, check_spins)
if(length(m[m!="ERROR"]) != 0) m_all[k] <- as.numeric(m[m!="ERROR"])
else m_all[k] <- NA
}
return(mean(Mod(m_all), na.rm = T))
}
stopCluster(cl)

```