

Программа дисциплины "Прикладная математика"

Краткая аннотация

Целью курса является обучение прикладным математическим методам, используемым в курсах магистратуры по математическим, экономическим и физическим дисциплинам. Материал курса состоит из следующих разделов: экстремумы и условные экстремумы, прикладные аспекты теории функций комплексного переменного, дифференциальные уравнения и вариационное исчисление и дифференциальная геометрия. Курс ориентирован на выработку умения решать конкретные задачи обсуждаемого типа.

Наиболее важные приемы и технические результаты, которыми слушатели курса должны владеть до его начала

При работе над курсом слушателям потребуется владения основными дифференциального исчисления - умения дифференцировать и интегрировать, основами линейной алгебры - элементами теории матриц и методами решения линейных алгебраических уравнений, базовыми основами теории функций комплексной переменной - основными свойствами элементарных функций комплексного переменного.

Календарный план занятий

1. Экстремумы функций многих переменных. Неявные функции.
2. Условный экстремум. Метод Лагранжа.
3. Условия Куна - Такера. Линейное программирование.
4. Производные и интегралы для функций комплексного переменного.
5. Ряды и интегралы Фурье
6. Вычисление интегралов методом вычетов.
7. Дельта - функция Дирака. Функции Грина.

8. Дифференциальные уравнения: особые точки, устойчивость по Ляпунову
9. Вариационное исчисление: функционал, уравнение Эйлера, условный экстремум.
10. Вариационные принципы: принцип Ферма, принцип наименьшего действия
11. Векторный анализ: производная от вектора, градиент, дивергенция.
12. Векторный анализ: векторное произведение, вращение, ротор.
13. Векторный анализ в криволинейных координатах.
14. Теория поверхностей.
15. Дифференциальное исчисление тензоров. Симметричные и антисимметричные тензоры.
16. Ковариантное дифференцирование, кривизны.

Задачи

1. Найти производную $y' = dy/dx$ при условии $x^{1/3} + y^{1/3} = 1$
2. Найти производную y'' при условии $ax^2 + by^2 = c$
3. Найти максимум функции $f(x, y, z) = xyz$ при условиях $x^2 + y^2 = 1, x + z = 1$.
4. Найти максимум функции $f(x, y) = x + y$ при условиях $x + ay \leq 1, ax + y \leq 1, x, y \geq 0, a > 1$.
5. Выписать условия Куна - Такера и найти максимум функции $f(x, y, z) = xyz$ при ограничениях $x + y + z \leq 1, x, y, z \geq 0$.
6. Вычислить интеграл $\int_{|z|=1} dz e^{1/z}$.
7. Вычислить интеграл $\int_0^\pi d\theta \frac{1}{a+b \cos \theta}$.
8. Вычислить интеграл $\int_0^\infty dx \frac{\sin x}{x}$.

9. Вычислить интеграл $\int_0^\infty dx \frac{\sqrt{x}}{1+x^3}$
10. Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $[-\pi, \pi]$ и периодична с периодом 2π . Выписать фурье - разложение для $f(x) = x$ и $f(x) = x^2$.
11. Найти спектральную плотность функции $f(x) = \exp(-a|x|)$.
12. Вычислить фурье - преобразование от $f(x) = \frac{1}{|x|^\alpha}$
13. Вычислить $\int_{-\infty}^\infty dx x^3 \delta(x^2 - a^2)$.
14. Вычислить $|x|'$.
15. Описать характер особой точки для уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{ax+y}{y+ax}$, $a > 1$.
16. Проанализировать устойчивость решений уравнения $\frac{dy}{dx} = y^3 - ay$.
17. Найти вариацию функционала $I = \int_0^1 dx xy^2$
18. Найти $y(x)$, минимизирующую функционал $I = \int_0^1 dx (y - ax)^2 (c + dx)^4$.
19. Найти $y(x)$, минимизирующую функционал $I = \int_0^1 dx (ay^2 + by'^2)$ при $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.
20. Найти экстремали функционала $\int_a^b \sqrt{1 + y'^2}$.
21. Найти производную от поля $\phi = x^2 y^2 - z^3$ в точке $(1, 2, 3)$ по направлению $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.
22. Найти площадь треугольника с координатами вершин $(1, 2, 3)$, $(-1, 1, 2)$, $(2, 1, 0)$
23. Доказать, что для двух скалярных функций f , g имеет место равенство $\operatorname{div}(f\nabla g) = f\nabla^2 g + \nabla f \times \nabla g$
24. Найти параметрические уравнения линии пересечения плоскостей $x + y = 1$ и $y + z = 1$
25. Вычислить угол винтовой линии $x = r \cos \omega t$, $y = r \sin \omega t$, $z = vt$ к оси z .
26. Вычислить репер Френе, кривизну и кручение винтовой линии.

27. Вычислить первую квадратичную форму на эллипсоиде $\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}$.
28. Вычислить гауссову кривизну на плоскости Лобачевского $dt^2 = dr^2 + \sinh^2(r/R)d\phi^2$.