Курс теории вероятностей для магистрантов.

Андрей Хохлов

1 Цель курса

Имеется значительное число вводных курсов Теории Вероятностей и никак нельзя сказать, что они копируют друг друга, хотя набор тем практически неизменен. Обычно представлены сюжеты элементарной (конечной) теории с (как бы) взятыми из реальности интерпретациями ее применений, предельные случаи некоторых конечных распределений, теоретико-множественные конструкции алгебр подмножеств и теория меры, теория интеграла Лебега на пространствах с мерой, разбор основных примеров сходимостей последовательностей случайных величин. При этом зависимости от вкусов автора упор делается либо на интерпретациях (и таким образом курс приобретает как бы прикладной характер – см. например известный курс для слушателей Академии им. Жуковского Е.С.Вентцель "Теория Вероятностей"), либо на чисто математических утверждениях о пространствах с мерой (например, А.А.Боровков "Теория Вероятностей"). Ожидается, что магистранты-слушатели курса имеют некоторые фрагментарные познания в теории вероятностей, во всяком случае владеют словарем простейших понятий, знакомы с простейшими формулами. Поэтому курс изначально ориентирован не на первое знакомство с предметом, а на осмысление важных сюжетов этой области математики. Принимая во внимание имеющийся и в целом общедоступный корпус текстов, я решил в целом не отходить от традиционного набора тем, стараясь по возможности выделить следующие сюжеты.

- Построения в рамках элементарной теории вероятности, использующие симметрии и неразличимость
- Роль булевской алгебры событий в построении элементарной теории и сравнение с конструкциями, использующимися в квантовой статистике (вообще – пояснить вероятностную терминологию в ее квантовых интерпретациях).
- Проблемы перехода от конечных (комбинаторных) вероятностных пространств к бесконечным, появление неожиданных примеров и интерпретаций на этом пути
- Свойства одномерного случайного блуждания (заимствуя примеры из курса Феллера и Ширяева)
- Разнообразные типы сходимостей случайных величин и связь с безгранично-делимыми распределениями.
- Словарь понятий, облегчающий чтение иных курсов по теории вероятностей, в частности уделить внимание мартингалам.

В целом, список задач построен так, чтобы стимулировать самостоятельное прочтение материала из рекомендуемых книг.

2 Конечные вероятностные описания. Элементарная теория вероятностей и комбинаторика.

Разные подходы к понятию вероятности – частотный, байесовский их отличия. Парадоксы. Конечные модели исходов и событий, классический и неклассический случай построения элементарных событий. Парадокс де Мере и учет симметрий, связанные с симметриями комбинаторные задачи.

2.1 Литература к теме.

Феллер "Введение в теорию вероятностей и ее приложениятом 1.

2.2 Задачи к теме

1. Вывести явную формулу $F(N, M)$ для числа раскладок N различимых шаров в M различимых ящиков (Статистика Максвелла-Больцмана)

2. Сколько существует раскладок N различимых шаров в M различимых ящиков так, чтобы в ящике с номером 1 оказалось бы ровно k шаров?

3. Сколько существует раскладок N различимых шаров в M различимых ящиков, чтобы числам шаров в ящиках отвечала бы последовательность $\{k_1, \dots k_M\}$ шаров?

4. Вывести явную формулу для числа раскладок N неразличимых шаров в M различимых ящиков (Статистика Бозе-Эйнштейна)

5. Вывести явную формулу для числа специальных (чтобы в каждом ящике было не более одной частицы) раскладок N неразличимых шаров в $N \leqslant M$ различимых ящиков (Статистика Ферми-Дирака)

3 Дискретные системы и их квантовый аналог

Измерения и вероятность. Пространство событий для описания измерения, нескольких измерений. N-уровневые системы и вероятности, чистые и смешанные состояния. Булева алгебра событий и ее квантовый аналог. Бит и кубит. Квантовая механика и классические вероятности. О статистических оценках неизвестных вероятностей, концепция Мизеса повторения испытаний и ее формализация.Генерация псевдослучайных чисел.

3.1 Литература к теме.

Феллер "Введение в теорию вероятностей и ее приложения том 1.

Гнеденко "Теория вероятностей".

Холево "Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории".

3.2 Задачи к теме

1. Указать пространство элементарных событий бросаний монеты вплоть до выпадения орла в m-й раз (зто так называемое отрицательное биномиальное распределение).

2. Среди n шаров, имеются n_1 красных и $n_2 = n - n_1$ черных шаров. Из этой сово- совокупности выбирается группа в r шаров (без возвращения и без учета порядка шаров внутри группы). Найти вероятность q_k того, что группа, выбранная таким образом, содержит ровно k красных шаров. Здесь $k < n_1$ является целым неотрицательным числом, меньшим r Система вероятностей q_k. определенных таким образом, называется гипергеометрическим распределением).

3. Пусть в статистике Максвелла-Больцмана оба параметра стремятся к бесконечности так, что их отношение остается постоянным λ. Указать предел для вероятности p_k того, что в данном ящике ровно k шаров (распределение Пуассона).

4. Пусть в статистике Бозе-Эйнштейна оба параметра стремятся к бесконечности так, что их отношение остается постоянным λ. Указать предел для вероятности p_k того, что в данном ящике ровно k шаров.

5. Геометрия Эрмитовых наюлюдаемых. Рассмотрим эрмитово двумерное пространство $\mathbb{C}^2$. Одномерные комплексные подпространства $L \subset \mathbb{C}$ называются *состояниями*, а эрмитов оператор $A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ (с собственными векторами $\mathbf{e}_1$,$\mathbf{e}_2$ и собственными значениями λ_1, λ_2 называется наблюдаемой, обозначим оператор ортогонального проектирования на собственное направление через $P_{\mathbf{e}_i}$, $i = 1, 2$.

   - Проверить, что пара чисел $p_i = (\mathbf{v}, P_{\mathbf{e}_i}(\mathbf{v})/(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ $i = 1, 2$ задает распределение вероятностей, зависящее от состояния L, порождаемого вектором $\mathbf{v}$. Эти вероятности называются *вероятностями для наблюдаемой A в состоянии L принимать значения λ_i*.
   - $p_i = \mathrm{Tr}(P_{\mathbf{e}_i} P_{\mathbf{v}})$, объяснить.

- Обозначим $\langle A \rangle_L = \mathrm{Tr}(AP_{\mathbf{v}})$. Почему это называют средним значением в состоянии L чему с точки зрения теории вероятностей соответствует эта величина? Проверить, что $\langle A \rangle_L = (\mathbf{v}, A\mathbf{v})/(\mathbf{v}, \mathbf{v})$
- Согласно предыдущей задаче величину $\langle A^2 \rangle_L - \langle A \rangle_L^2$ следует называть дисперсией наблюдаемой A в состоянии L, проверить это.
- Найти все состояния в которых наблюдаемая $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ имеет максимальную и минимальную дисперсии. Найти значения этих экстремальных дисперсий.

4 Понятие независимости.

Примеры. Независимость попарная и независимость в совокупности. Связь с понятием функциональной зависимости для случайных величин. Практические интерпретации: понятие ансамбля (генеральной совокупности). Генерация псевдослучайных чисел. Модели нескольких измерений в теории вероятностей и в квантовой статистике: зацепленные состояния (квантовая спутанность мер).

4.1 Литература к теме.

Феллер "Введение в теорию вероятностей и ее приложения"том 1

Холево "Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории".

М.Кац "Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел"

Секей "Парадоксы в теории вероятностей и мат.статистике".

Press, Teukolsky, et al "Numerical Recepies"

4.2 Задачи к теме

1. Указать, следует ли из попарных зависимостей трех событий их зависимость в совокупности? Наоборот, указать следует ли из попарной независмости независимость в совокупности?
2. Верна ли формула $P(B|A) + P(B|\bar{A}) = 1$?
3. Для независимых событий $A_1, \dots A_n$ доказать $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^n P(\bar{A}_i)$.

5 Геометрические и вероятностные описания в бесконечном случае. Борелевская алгебра событий, аксиоматика

Вероятностная модель эксперимента с бесконечным числом исходов.Аксиоматика Колмогорова. Аксиома непрерывности и ее смысл. Меры атомарная, абсолютно непрерыная и сингулярная. Разложение монотонной функции и вероятностные пространства на прямой. Построение вероятностных мер на прямой и в многомерных пространствах. Меры на вещественной прямой и конечные подмножества. Независимость попарная и групповая, последовательности и ряды, Многомерные распределения. Понятие эргодичности.

5.1 Литература к теме.

Ширяев "Вероятность".

Феллер "Введение в теорию вероятностей и ее приложения"том 2

Я.Синай "Введение в эргодическую теорию

5.2 Задачи к теме

1. Вероятностные модели в интерпретации Радемахера. Пусть $\Omega = [0,1]$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}([0,1])$ борелевская алгебра и P мера Лебега. Рассмотрим двоичное разложение числа $\omega \in \Omega$:

$$\omega = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\omega) 2^{-k}$$

где коэффициенты $a_k(\omega)$ равны 0 или 1 (такое представление неоднозначно и предполагается, что в неоднозначных случаях рассматриваются только представления с бесконечным количеством нулей среди коэффициентов $a_k(\omega)$). Проверьте, что $\{a_k(\omega)\}$ – последовательность независимых случайных величин на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ причем выполняется

$$P(a_k = 1) = P(a_k = 0) = 1/2$$

2. Если на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ задана последовательность $\{\xi_k\}$ независимых случайных величин удовлетворяющих условию $P(\xi_k = 1) = P(\xi_k = 0) = 1/2$, то случайная величина $\alpha(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(\omega) 2^{-k}$ равномерно распределена на $[0,1]$.

6 Основные статистические конструкции и формулы.

Гильбертово пространство случайных величин с конечным вторым моментом. геометрия винеровского процесса и спирали в Гильбертовом пространстве. Моменты, семиинварианты, производящие и характеристические функции, характеристики распределений с тяжелыми хвостами.

6.1 Литература к теме.

Ширяев "Вероятность".

Феллер "Введение в теорию вероятностей и ее приложения"том 1, 2

Kahane "Some random series of functions

Gut "Probability. A graduate course".

6.2 Задачи к теме

1. Выписать явные формулы для производящих функций основных дискретных распределений: геометрического,биномиального, пуассоновского.

2. Пусть $X_0, X_1 \dots$ последовательность независимых одинаково распределенных целочисленных неотрицательных случайных величин, соответствующую произвводящую функцию обозначим $f(t)$, пусть еще задана независимая от них случайная величина Y также с неотрицательными целыми значениями, ее производящую функцию обозначим $g(t)$. Выразить производящую функцию суммы Z случайного числа Y случайных величин X_i: $Z = X_0 + X_1 + \dots X_Y$

3. Пусть функция $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ неотрицательная и неубывающая. Если математическое ожидание $E\left(g(|X|)\right) < \infty$, то для положительного a

$$P(|X| > a) \leqslant \frac{E\left(g(|X|)\right)}{g(a)}$$

4. Вывести из предыдущей задачи неравенство Маркова, оценивающее скорость убывания хвостов распределения, обладающего конечным абсолютным моментом степени k:

$$P(|X| > x_0) \leqslant \frac{E\left((|X|^k)\right)}{x_0^k} \qquad x_0 > 0$$

7 Случайное блуждание

Задача о разорении. Средняя продолжительность игры. Переход к пределу и диффузия. Цепи Маркова. Стационарные состояния.

7.1 Литература к теме.

Ширяев "Вероятность".

Феллер "Введение в теорию вероятностей и ее приложения"том 1, 2

7.2 Задачи к теме

1. Классифицировать состояния цепи Маркова, заданных матрицей:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Классифицировать состояния и найти асимптотическое поведение цепи Маркова, заданных матрицей:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

8 Виды сходимости последовательностей случайных величин 1.

Что означают равенства и предельные переходы для случайных величин. Центральная Предельная Теорема и ее версии, скорость сходимости. Практический смысл и границы применимости ЦПТ в приложениях. Классический закон больших чисел.

Гнеденко "Теория вероятностей"

Тутубалин "Теория вероятностей и случайных процессов"

8.1 Задачи к теме

1. С помощью формулы Муавра-Лапласа оценить вероятность того, чтоо при 200 бросаниях идеальной монеты число появлений герба будет лежать в пределах $[95, 105]$. Сравнить с оценкой неравенства Чебышева.

2. Найти такое число k, чтобы с вероятностью по крайней мере $\simeq 0.5$ число выпадений герба при 1000 бросаниях идеальной монеты было заключено между 440 и k.

3. Пусть на вероятностном пространстве $([0,1], \mathfrak{B}([0,1]), P)$ где P — мера Лебега и $\mathfrak{B}([0,1])$ – алгебра борелевских множеств заданы случайные величины

$$\xi_n^i(\omega) = \mathbf{1}_{U_n^i} \qquad U_n^i = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right], \quad i = 1, \dots n$$

   Показать, что последовательность $\xi_1^1, \xi_2^1, \xi_2^2, \xi_3^1, \xi_3^2 \dots$ сходится и по вероятности и в среднем.

4. Есть ли предел у последовательность из предыдущей задачи в смысле сходимости почти всюду?

5. Пусть на вероятностном пространстве $([0,1], \mathfrak{B}([0,1]), P)$ где P — мера Лебега и $\mathfrak{B}([0,1])$ – алгебра борелевских множеств заданы случайные величины

$$\xi_n(\omega) = \begin{cases} e^n & 0 \leqslant \omega \leqslant 1/n \\ 0 & \omega > 1/n \end{cases}$$

   Есть ли предел у этой последовательность в смысле сходимости почти всюду? К чему она сходится по вероятности?

6. Есть ли предел у последовательность из предыдущей задачи в смысле сходимости в среднем квадратическом?

7. Пусть задана последовательность независимых случайных величин xi_n, принимающих значения 1 и 0, с вероятностями p_n и $1-p_n$ соответственно. Пусть $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$. Проверить сходится ли последовательность по вероятности и в среднем.

9 Виды сходимости последовательностей случайных величин 2.

Безгранично делимые распределения и полугруппы, примеры и контрпримеры. Случай конечных дисперсий. Закон больших чисел в формулировках Чебышева, Маркова. Теорема Гливенко. Обзор версий закона больших чисел. Варианты Центральной Предельной Теоремы, функция Крамера. Набросок доказательства теоремы о больших отклонениях. Функции очень многих переменных, принцип концентрации на примере куба, сферы. Типичные по Леви значения и почти постоянство функции на многомерной сфере.

9.1 Литература к теме.

Sornette "Critical phenomena in natural sciences"

Ширяев "Вероятность".

Гнеденко "Теория вероятностей"

В.Зорич "Математический анализ задач естествознания,