Электродинамика

§1 Краткая аннотация дисциплины

В данном курсе изучается теория электромагнитного поля и основы общей теории относительности. Студенты знакомятся с 4-мерной формулировкой основных законов электродинамики и общей теории относительности, основанных на принципах симметрии. Центральная часть курса состоит в решении тщательно подобранных задач. направленных на овладение аппаратом данного раздела теоретической физики. Вершиной раздела, посвященного общей теории относительности является разбор трех классических задач: метрика Шварцшильда, планетарная прецессия орбит и решение изотропной космологической задачи.

§2 Наиболее важные приемы и технические результаты, которыми слушатели курса должны владеть на момент его освоения

На момент начала курса студенты должны иметь твердые представления о гамильтоновом формализме классической механики, знать математический анализ и рудиментарные основы теории функций комплексного переменного и тензорного анализа.

§3 Предварительный календарный план занятий, примерные темы лекционных и семинарских пар

§1 Электродинамика

Лекция 1

Краткий математический экскурс (выжимка из предыдущего семестра). Общее определение ковариантных и контравариантных векторов и тензоров. Преобразования

Лоренца как частный случай преобразований векторов и тензоров в метрике Минковского. 1. Преобразование вектора. 2. Преобразование компонент антисимметричного тензора. Разбиение антисимметричного тензора на полярную и аксиальную компоненту. 3. Метрический тензор, тензор Леви-Чевита.

Лекция 2

1. Действие свободной частицы. Вывод лагранжевых уравнений движения. 2. Действие для частицы в электромагнитном поле. 4-вектор потенциала. Уравнения движения в 4-мерной форме. Вектор электрического и магнитного поля. Уравнение Гамильтона-Якоби. 3. Калибровочная инвариантность. Сохраняющийся вектор тока (уравнение непрерывности).

Лекция 3

Действие электромагнитного поля. Вывод уравнений Максвелла. Частный случай постоянного электрического поля.

Лекция 4

Решение задач.
1. Движение в постоянном электрическом поле.
2. Движение в постоянном магнитном поле.
3. Движение в скрещенных полях.

Семинар

Решение 2-х задач на поиск электрического поля (уравнение Лапласа и Пуассона). Решение 3-х задач на движение в постоянном поле (в том числе общее решение движения в кулоновом поле методом Гамильтона-Якоби)

Лекция 5

Симметрия действия. Теорема Эмми Нётер. Тензор энергии импульса и его сохранение как следствие трансляционной инвариантности действия. Тензор энергии импульса электромагнитного поля.

Лекция 6

Дипольный момент, магнитный момент, мультипольное разложение. Энергия зарядов во внешнем поле. Постоянное магнитное поле. Закон Био-Савара. Решение 3-х задач на поиск магнитного поля. Решение 2-х задач на движение в магнитном поле.

Лекция 7

Волновое уравнение. Плоская волна. Решение задачи о движении заряда в плоской волне методом Гамильтона-Якоби.

Лекция 8

Запаздывающие потенциалы. Потенциалы Лиенара-Вихерта. Излучение электромагнитной волны точечным зарядом. Дипольное излучение.

Семинар

Решение задач на излучение электромагнитных волн (в том числе классическая задача о времени жизни позитрония и излучение антенны).

§2 Общая теория относительности

Лекция 9

Частица в гравитационном поле. Собственное время. 4-мерный и 3-мерный метрические тензоры. Ковариантное дифференцирование. Символы Кристоффеля. Их связь с метрическим тензором.

Лекция 10

Уравнение геодезических. Предельный переход в случае слабого потенциала.

Семинар

Решение уравнений геодезических в различных метриках.

Лекция 11

Тензор Римана-Кристоффеля. Его свойства симметрии. Задачи на вычисление кривизны в различных метриках.

Лекция 12

Вывод уравнений Эйнштейна.

Лекция 13

Вывод закона Ньютона (уравнения Пуассона на потенциал) из уравнений Эйнштейна. Сферически-симметричное гравитационное поле, предварительные замечания.

Лекция 14

Метрика Шварцшильда. Гравитационный коллапс. Черные дыры.

Лекция 15

Движение частиц в центрально-симметричном поле. Классические задачи.

Семинар

Решение задач на движение в шварцшильдовой метрике.

Лекция 16

Космологические решения. Открытая и закрытая модель. Красное смещение.

§4 Примерный список задач и вопросов

Задача 1

Доказать, что если $a_i = T_{ik}b_k$ в каждой системе координат и T_{ik} - тензор II ранга, а b_k - вектор, то a_i - тоже вектор.

Задача 2

$\overline{\text{Найти}}$ $\overline{\text{усреднённые}}$ $\overline{\text{по всем}}$ $\overline{\text{направлениям}}$ $\overline{\text{значения}}$ $\overline{\text{следующих выражений:}}$ $\overline{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})^2}$, $\overline{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{n})}$, $\overline{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}}$, $\overline{(\mathbf{a}\times\mathbf{n})^2}$, $\overline{(\mathbf{a}\times\mathbf{n})(\mathbf{b}\times\mathbf{n})}$, $\overline{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{n})(\mathbf{c}\cdot\mathbf{n})(\mathbf{d}\cdot\mathbf{n})}$. если $\mathbf{n}$ - единичный вектор, все направления которого равновероятны, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ - постоянные векторы.

Задача 3

a) Вычислить интегралы $\oint \mathbf{r}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})dS$, $\oint(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}dS$, где $\mathbf{a}$ - постоянный вектор, $\mathbf{n}$ - орт нормали к поверхности.
b) Интегралы по замкнутой поверхности $\oint \mathbf{n}\varphi\, dS$, $\oint(\mathbf{n}\times\mathbf{a})\, dS$ и $\oint(\mathbf{n}\cdot\mathbf{b})\mathbf{a}\, dS$, ($\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ - постоянные векторы, $\mathbf{n}$ - орт нормали) преобразовать в интегралы по объёму, заключенному внутри поверхности.

Задача 4

a) Вычислить $\nabla\varphi(r)$; $\operatorname{div}\varphi(r)\mathbf{r}$; $\operatorname{rot}\varphi(r)\mathbf{r}$; $(\mathbf{n}\cdot\nabla)\varphi(r)\mathbf{r}$.
b) Найти функцию $\varphi(r)$, удовлетворяющую условию $\operatorname{div}\varphi(r)\mathbf{r} = 0$
c) Найти дивергенции и вихри следующих векторов: $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{b}$, $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}$, $(\mathbf{a}\times\mathbf{r})$, $\varphi(r)(\mathbf{a}\times\mathbf{r})$, $\mathbf{r}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{r})$ где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ - постоянные векторы.

Задача 5

a) Записать формулы преобразования Лоренца для произвольного 4-вектора $A_i = ({}_0, \mathbf{A})$, не предполагая, что скорость $\mathbf{V}$ системы S' относительно S параллельна оси x.
b) Вывести формулы сложения скоростей для случая, когда скорость $\mathbf{V}$ системы S' относительно S имеет произвольное направление. Формулы представить в векторном виде.

Задача 6

Происходит три последовательных преобразования системы от- счета: 1) переход от системы S к системе S', двигающейся относительно S со скоростью $\mathbf{V}$, параллельной оси x; 2) переход от системы S' к систе- ме S'', двигающейся относительно S' со скоростью $\mathbf{v}$, параллельной оси y'; 3) переход от системы S'' к системе S''', двигающейся относительно S'' со скоростью, равной релятивистской сумме скоростей $-\mathbf{v}$ и $-\mathbf{V}$.

Доказать, что система S''', как и следует ожидать, неподвижна относительно S и $t''' = t$, однако S''' повернута относительно S на некоторый угол в плоскости xy (томасовская прецессия). Вычислить угол φ томасовской прецессии.

Задача 7

a) Выразить компоненты четырехмерного ускорения ω_i через обычное ускорение $\dot{\mathbf{v}}$ и скорость $\mathbf{v}$ частицы. Найти ω_i^2. Пространственноподобно или времениподобно четырехмерное ускорение?
b) Выразить ускорение $\dot{\mathbf{v}}'$ частицы в мгновенно сопутствующей ей инерциальной системе через ее ускорение $\dot{\mathbf{v}}$ в лабораторной системе. Рассмотреть случаи, когда скорость $\mathbf{v}$ частицы меняется только по величине или только по направлению.

Задача 8

Релятивистская частица совершает "равноускоренное"одномерное движение (ускорение $\dot{v} = \omega$ постоянно в собственной системе отсчета). Найти зависимость скорости $v(t)$ и координаты $x(t)$ частицы от времени t в лабораторной системе отсчёта, если начальная скорость v_0, а начальная координата x_0. Рассмотреть, в частности, нерелятивистский и ультрарелятивистский пределы.

Задача 9

Пучок света в некоторой системе отсчёта образует телесный угол $d\Omega$. Как изменится этот угол при переходе к другой инерциальной системе отсчёта?

Задача 10

Доказать равенства:
а) $\varepsilon_{iklm}\varepsilon^{lm}{}_{rs} = 2(g_{is}g_{kr} - g_{ir}g_{ks})$;
б)$\varepsilon_{iklm}\varepsilon^{klm}{}_{n} = -6g_{in}$.

Задача 11

а) В системе отсчёта S имеется однородное электромагнитное поле $\underline{\mathrm{E}}$, $\underline{\mathrm{H}}$. С какой скоростью относительно S должна двигаться система S', в которой $\widehat{E}' \parallel \underline{\mathrm{H}}'$? Всегда ли задача имеет решение и единственно ли оно? Чему равны абсолютные значения $\underline{\mathrm{E}}'$ и $\underline{\mathrm{H}}'$?

Задача 12

Электрический диполь с моментом $\underline{\mathrm{p}}_0$ в системе покоя равно- мерно движется со скоростью $\mathbf{V}$. Найти поля φ, $\mathbf{A}$, $\widehat{E}$, $\mathbf{H}$.

Задача 13

Найти формулы преобразования компонент тензора энергии импульса T_{ik} при преобразовании Лоренца.

Задача 14

а) Заряд распределен в пространстве по периодическому закону $\rho = \rho_0 \cos\alpha x \cos\beta y \cos\gamma s$, образуя бесконечную пространственную периодическую решетку. Найти потенциал φ электрического поля.
b) Плоскость $z = 0$ заряжена с плотностью, меняющейся по пери- одическому закону $\sigma = \sigma_0 \sin\alpha x \sin\beta y$, где σ_0, α, β - постоянные. Найти потенциал φ этой системы зарядов.

Задача 15

а) Бесконечно длинный круговой цилиндр радиуса R равномерно заряжен по объему или по поверхности так, что на единицу его длины приходится заряд κ. Найти потенциал φ и напряженность электрического поля E.
Найти потенциал φ и напряженность E электрического поля шара, равномерно заряженного по объёму. Радиус шара R, заряд q.

Задача 16

а) Вычислить дипольный момент сферического распределения заряда радиуса R, с плотностями заряда ρ и $-\rho/2$ - в левом и правом полушариях соответственно. Нача-

ло системы координат находится в центре сферы.
b) Определить дипольный момент неравномерно заряженного тонкого кольца радиуса R, с погонной плотнотью заряда $\rho(\varphi) = \rho_0 \cos\varphi$.
c) Определить квадрупольный момент равномерно заряженного диэлектрического круга радиуса R относительно его центра. Круг лежит в плоскости xy и его центр совпадает с началом координат. Полный заряд круга Q.

Задача 17

a) Найти потенциал φ и напряженность E электрического поля равномерно заряженного прямолинейного отрезка длиной 2, занимающего часть оси z от $-a$ до $+a$; заряд отрезка q.
b) Найти форму эквипотенциальных поверхностей равномерно заряженного отрезка.

Задача 18

Пространство между двумя концентрическими сферами, радиусы которых R_1 и R_2 ($R_1 \leq R_2$), заряжено с объемной плотностью $\rho = \alpha/r^2$. Найти полный заряд q, потенциал φ и напряженность E электрического поля. Рассмотреть предельный случай $R_2 \to R_1$, считая при этом $q = \text{const}$.

Задача 19

a) Найти уравнения силовых линий системы двух точечных зарядов: заряда $+q$, находящегося в точке $z =$, и заряда $\pm q$, находящегося в точке $z = -$; начертить силовые линии. Имеются ли в поле точки равновесия?
b) Найти уравнение силовых линий линейного квадруполя (заряды q, $-2q$, q расположены по оси z на расстоянии друг от друга) и нарисовать примерную картину силовых линий.

Задача 20

Определить напряженность магнитного поля $\mathbf{H}$, создаваемое постоянным током I, текущим по бесконечному цилиндрическому проводнику кругового сечения радиуса a. Решить задачу наиболее простым способом - с помощью уравнения Максвелла в интегральной форме, а также путём введения векторного потенциала $\mathbf{A}$.

Задача 21

a) Прямолинейная, бесконечно длинная полоса имеет ширину a. Вдоль полосы течет ток I, равномерно распределенный по её ширине. Найти магнитное поле $\underline{\mathrm{H}}$. Проверить результат, рассмотрев предельный случай поля на больших расстояниях.
b) Противоположно направленные токи равной величины I текут по двум тонким

бесконечно длинным параллельным пластинам, совпадающим с двумя гранями бесконечной призмы прямоугольного сечения. Ширина пластин a, расстояние между ними b. Найти силу взаимодействия на единицу длины f.

Задача 22

a) Найти векторный потенциал $\mathbf{A}$ и магнитное поле $\underline{\mathrm{H}}$, создаваемые двумя прямолинейными параллельными токами I, текущими в противоположных направлениях. Расстояние между токами $2a$.
b) Определить магнитное поле $\underline{\mathrm{H}}$, создаваемое двумя параллельными плоскостями, по которым текут токи с одинаковыми поверхностными плотностями $i = \mathrm{const}$. Рассмотреть два случая: 1) токи текут в противоположных направлениях; 2) токи направлены одинаково.

Задача 23

Найти скорость $\mathbf{v}$ частицы с массой m и зарядом e, прошедшей разность потенциалов V (начальная скорость равна нулю). Упростить общую формулу для нерелятивистского и ультрарелятивистского случаев (учесть по два члена разложения).

Задача 24

Частицы сорта 1, обладающие в системе S скоростью $\mathbf{v}_1$, рассеиваются неподвижными частицами сорта 2. Как преобразуется сечение рас- сеяния $d\sigma_{12}$ при переходе к системе отсчета S', в которой частицы сорта 2 обладают скоростью $\mathbf{v}_2'$, а частицы сорта 1 - скоростью $\mathbf{v}_1'$? Рассмотреть, в частности, случай, когда скорости $\mathbf{v}_1'$ и $\mathbf{v}_2'$ параллельны.

Задача 25

Релятивистская частица с зарядом e, массой m и скоростью на бесконечности v_0 рассеивается на малый угол кулоновым полем неподвижного заряда e'. Определить дифференциальное сечение рассеяния $d\sigma(\theta)/d\Omega$.

Задача 26

По бесконечно длинному прямому цилиндрическому проводу радиуса a течет ток I. С поверхности провода срывается электрон начальная скорость v_0 которого направлена вдоль провода. Найти наибольшее расстояние b, на которое электрон может удалиться от оси проводника.

Задача 27

Электрон с зарядом e и массой m пролетает в вакууме над плоской незаряженной поверхностью диэлектрика с проницаемостью ε. Вначале электрон двигался параллельно поверхности диэлектрика со скоростью v и находился от нее на расстоянии a. На каком расстоянии х от проекции начального положения электрона на поверхность диэлектрика электрон врежется в диэлектрик?

Задача 28

a) Две плоские монохроматические линейно поляризованные волны одной частоты распространяются вдоль оси z. Первая волна поляризована по x и имеет амплитуду a, вторая поляризована по y, имеет амплитуду b и опережает первую по фазе на χ. Найти поляризацию результирующей волны.
b) Рассмотреть зависимость поляризации от сдвига фаз χ для случая $a = b$.
c) Две монохроматические волны одной частоты поляризованы по кругу с противоположными направлениями вращения, имеют одинаковые фазы и распространяются в одном направлении. Амплитуды этих волн a (у правополяризованной волны) и b (у левополяризованной волны). Найти зависимость характера поляризации от отношения a/b (a и b можно выбрать вещественными).

Задача 29

Снежинка падает на землю с высоты 1 км (с нулевой начальной скоростью), равномерно ускоряясь с ускорением g. Оценить полную энергию дипольного излучения снежинки за время полета до поверхности земли, если её заряд равен заряду электрона e.

Задача 30

Найти электромагнитное поле $\underline{H}$, $\underline{E}$ заряда e, движущегося равномерно по окружности радиуса a. Движение нерелятивистское, угловая скорость ω. Расстояние до точки наблюдения $r \gg a$. Найти средние по времени угловое распределение $dI/d\Omega$ и полную интенсивность I излучения, а также исследовать его поляризацию.

Задача 31

Колебания двух электрических дипольных осцилляторов имеют одинаковую частоту ω, но сдвинуты по фазе на $\pi/2$. Амплитуды дипольных моментов равны по величине p_0 и направлены под углом φ друг к другу. Расстояние между осцилляторами мало по сравнению с длиной волны. Найти поле $\underline{H}$ в волновой зоне, угловое распределение $dI/d\Omega$ и полную интенсивность I излучения. Исследовать состояние поляризации поля излучения системы.

Задача 32

Чему равна полная энергия дипольного излучения в результате столкновения двух тождественных частиц с зарядом e и массой m каждая? Прицельное расстояние ρ. Начальная скорость одной из частиц v_0, другая - покоится.

Задача 32

Равномерно заряженная по объему капля пульсирует с неизмен- ной плотностью. Поверхность капли при этом описывается уравнением

$$R(\theta) = R_0[1 + P_2(cos\theta)\cos\omega t], \tag{1}$$

где $a \ll 1$. Заряд капли q. Найти угловое распределение $dI/d\Omega$ и полную интенсивность I излучения.

Задача 33

Линейно поляризованная волна падает на изотропный гармонический осциллятор. Скорость электрона $v \ll c$. Найти дифференциальное $d\sigma/d\Omega$ и полное σ сечения рассеяния волны с учетом силы лучистого трения. Рассмотреть, в частности, случаи сильно связанного и слабо связанного электрона.

Задача 34

Проекция Меркатора определяется следующим образом. На карте вводятся прямоугольные координаты (x, y), такие, что любая прямая на карте соответствует линии постоянного азимута (фиксированного положения стрелки компаса) на поверхности земного шара.
a) Доказать, что в проекции Меркатора точке на поверхности земного шара со сферическими координатами (θ, φ) на карте соответствует точка с координатами $x = \varphi,\ y = \ln \operatorname{ctg}(\theta/2)$.
b) Как записывается метрика земного шара в координатах (x, y)?
c) Доказать, что, за исключением особых случаев, когда $y = 0$ или $x = \mathrm{const}$, большим кругам соответствуют трансцендентные кривые $\operatorname{sh} y = \alpha \sin(x + \beta)$.

Задача 35

Внешне некоторое пространство выглядит как 3-мерное с координатами $x,\ y,\ z$ и метрикой

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + \left(\frac{3}{13}dx + \frac{4}{13}dy + \frac{12}{13}dz\right)^2 \tag{2}$$

Доказать, что в действительности оно двумерное, и найти две новые координаты ζ и η, в которых линейный элемент принимает вид

$$ds^2 = d\zeta^2 + d\eta^2. \tag{3}$$

Задача 36

Предположим, что в 2-мерном плоском евклидовом пространстве, описываемом полярными координатами $r,\ \theta$, геодезическими служат обычные прямые.

а) Пользуясь тем, что геодезические известны, и уравнением геодезических

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} = 0, \tag{4}$$

найти коэффициенты связности $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$.
b) Предположим, что в декартовых координатах $x,\ y$, связанных с полярными координатами $r,\ \theta$, как обычно, ковариантная структура задана соотношениями

$$\Gamma^x{}_{xx} = \Gamma^x{}_{xy} = ... = 0.$$

Пользуясь законом преобразования коэффициентов связности, вычислить их в полярных координатах $r,\ \theta$.
c) Исходя из линейного элемента $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$, найти символы Кристоффеля обычным способом — как производные компонент метрического тензора $g_{\mu\nu}$ (Разумеется, символы Кристоффеля, вычисленные всеми тремя способами, должны совпадать.)

Задача 36

a) Вычислить все не обращающиеся в нуль компоненты тензора Римана $R_{ijkl},\ (i,\ j,\ k,\ l = \theta,\ \varphi)$ для метрики

$$ds2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

2-сферы.
b) Найти символы Кристоффеля и компоненты тензора кривизны Римана в 2-мерном пространстве-времени:

$$ds^2 = dv^2 - v^2 du^2.$$

c) Ввести систему координат на торе (2-мерной поверхности «бублика» в 3-мерном евклидовом пространстве). Вычислить все компоненты $g_{\mu\nu},\ \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$ и $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$.

Задача 37

Вычислить тензор Римана, тензор Риччи и скалярную кривизну конформно-плоской метрики $g_{\mu\nu} = e^{2\varphi}\eta_{\mu\nu}$ где $\varphi = \varphi(x^\mu)$ — произвольная функция.

Задача 38

Докажите, что квадрат полного момента количества движения

$$L^2 = p_\theta^2 + \sin^{-2}\theta p_\varphi^2$$

есть интеграл движения вдоль любой геодезической в метрике Шварцшильда.

Задача 39

Частица падает по радиусу на центр метрики Шварцшильда. Чему равна её направленная к центру координатная скорость (dr/dt), измеряемая по собственному времени на бесконечности, при некотором значении радиуса r (в координатах кривизны)? Чему равна локально измеряемая скорость по отношению к неподвижному наблюдателю в точке с тем же значением радиуса?

Задача 40

Выведите описывающее траекторию (r как функцию φ) дифференциальное уравнение первого порядка для экваториальных орбит в геометрии Шварцшильда.

Задача 41

Покажите, что траектории световых лучей в метрике Шварцшильда подчиняются уравнению

$$\frac{du^2}{d\varphi^2} + u = 3u^2.$$

§5 Отчетность по курсу

По окончании курса студенты сдают экзамен, на котором будет предложено 3 задачи по электродинамике и 1 задача по общей теории относительности.

§6 Советы по освоению литературы

Лекция 1. Книга [1], §§6, 7; Книга [2], §§ 22, 30, 31; Книга [3], §§18-21, книга [4], §§1-9, книга [9], гл. 6§§1-8
Лекция 2. Книга [5], §§1-5; Книга [1],§§8, 9, 15-18;23,24; книга [8], гл. 15§§1-6
Лекция 3. Книга [1], §§26-29; Книга [7], гл. 4,5,6; книга [8], гл. 19, 18
Лекция 4. Книга [1], §§19-22;
Лекция 5. Книга [6], гл.2, §§2.1-2.8; Книга [1], §33
Лекция 6. Книга [1], §§36, 37, 40, 41, 43
Лекция 7. Книга [1], §§46, 48
Лекция 8. Книга [1], §§62, 63, книга [8], гл. 21, §6, книга [10], гл. 6 §1
Лекция 9. Книга [1], §§81-86, книга [2], §§30-37; книга [3], гл. 3;
Лекция 10. Книга [1], §§87, 88, книга [3], гл. 3-5;
Лекция 11. Книга [1], §§91-94, книга [3], гл. 3-5;
Лекция 12. Книга [1], §§95, книга [3], гл. 3-5;
Лекция 13. Книга [1], §§99, 100
Лекция 14. Книга [1], §§101, 102, 105

Лекция 15. Книга [1], §§101, 102, 105, книга [4], §23
Лекция 16. Книга [1], §§111-114

Литература

[1] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Теория поля, *Наука*, издание седьмое, исправленное, (1988)

[2] Н. Е. Кочин, Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, *Наука*, издание девятое, (1965)

[3] В. А. Фок, Теория пространства, времени и тяготения, *Государственное издательство технико-теоретической литературы*, (1955)

[4] Г.В. Коренев, Тензорное исчисление, *Издательство МФТИ*, (2000)

[5] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Механика, *Наука*, издание четвертое, исправленное, (1988)

[6] В.А. Рубаков, Классические калибровочные поля, *Эдиториал УРСС*, (1999)

[7] Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс, Фейнмановские лекции по физике, том **V**, *МИР*, Перевод с английского А. В. Ефремова, Г. И. Копылова, О. А. Хрусталева Под редакцией Я. А. Смородинского (1965)

[8] Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс, Фейнмановские лекции по физике, том **VI**, *МИР*, Перевод с английского А. В. Ефремова, Г. И. Копылова, О. А. Хрусталева Под редакцией Я. А. Смородинского (1965)

[9] Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс, Фейнмановские лекции по физике, том **VII**, *МИР*, Перевод с английского А. В. Ефремова, Г. И. Копылова, О. А. Хрусталева Под редакцией Я. А. Смородинского (1965)

[10] Я.И. Френкель, Электродинамика , *Государственное технико-теоретическое издательство*, (1934)